



**ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ**

**ΔΙΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΟ – ΔΙΑΤΜΗΜΑΤΙΚΟ  
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΜΕΤΑΠΤΥΧΙΑΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**

**«ΕΠΙΣΤΗΜΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ**

**ΥΔΑΤΙΚΩΝ ΠΟΡΩΝ»**

**ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑΣ ΧΩΡΙΚΗΣ ΠΑΡΕΜΒΟΛΗΣ  
ΥΔΡΟΜΕΤΕΩΡΟΛΟΓΙΚΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ  
ΜΕ ΤΕΧΝΙΚΕΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ**

**Νικόλαος Μαλάμος**

**«ΕΠΙΣΤΗΜΗ  
&  
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑ  
ΥΔΑΤΙΚΩΝ  
ΠΟΡΩΝ»**

**Αθήνα, Μάιος 2000**

**Επιβλέπων: Δ. Κουτσογιάννης, Επικ. Καθηγητής**



*“Δός μοί πά στῶ καί τά γᾶν κινάσω”*

Αρχιμήδης

Αφιερώνεται στη Στέλλα

Κ. ΜΕΜΟΣ





## **ΕΥΧΑΡΙΣΤΙΕΣ**

Με την ολοκλήρωση της μεταπτυχιακής μου εργασίας, θέλω να ευχαριστήσω τους ανθρώπους που με βοήθησαν κατά τη διάρκεια της εκπόνησής της.

Πρώτα από όλους θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου και επιβλέποντα, **κ. Δημήτρη Κουτσογιάννη**, Επικ. Καθηγητή, για την ανάθεση ενός τόσο ενδιαφέροντος αλλά και απαιτητικού θέματος. Η επιστημονική υποστήριξη και η καθοδήγησή του ήταν σημαντικοί παράγοντες για την ολοκλήρωση της εργασίας μου. Αναπτύσσοντας μια σχέση εμπιστοσύνης μου έδωσε την ευκαιρία να πάρω πρωτοβουλίες και να συνδυάσω γνώσεις και εμπειρίες ώστε να φτάσω στο τελικό αποτέλεσμα.

Πολύτιμη ήταν η βοήθεια του συναδέλφου **κ. Ανδρέα Ευστρατιάδη**, όσον αφορά το τμήμα της εργασίας που σχετιζόταν με θέματα προγραμματισμού αλλά και η συμπαράστασή του σε όλη τη διάρκεια της εκπόνησής της.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τους **κ. Αντώνη Κουκουβίνο** και **Δρ. Νικόλαο Μαμάση** για την συνδρομή τους σε τομείς που αφορούσαν το Σ.Γ.Π. ARCVIEW, για την παροχή πολύτιμων συμβουλών και παρατηρήσεων, και κυρίως για την υποστήριξη και ενθάρρυνσή τους, όταν χρειάστηκε.

Ευχαριστώ ακόμη τους **κ. Γιώργο Καραβοκυρό** και **κ. Βαγγέλη Ρόζο** για την καλή τους παρέα και τις συμβουλές τους όλο αυτό το χρονικό διάστημα.

Τέλος, ιδιαίτερα ευχαριστώ τους δικούς μου ανθρώπους για την συμπαράσταση και την υπομονή τους κατά την διάρκεια παρακολούθησης του μεταπτυχιακού προγράμματος.



## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

<b>ΠΕΡΙΛΗΨΗ.....</b>	<b>1</b>
<b>EXTENDED ABSTRACT .....</b>	<b>2</b>
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 .....</b>	<b>11</b>
<b>ΕΙΣΑΓΩΓΗ .....</b>	<b>11</b>
1.1 Γενικά .....	11
1.1.1 Παράγοντες γεωγραφικής μεταβλητότητας .....	11
1.2 Βιβλιογραφική επισκόπηση.....	12
1.2.1 Μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης.....	13
1.2.2 Μέθοδοι προσαρμογής επιφάνειας.....	15
1.3 Ακολουθούμενη προσέγγιση.....	22
1.4 Διάρθρωση της εργασίας.....	22
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 .....</b>	<b>24</b>
<b>ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΜΕ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ .....</b>	<b>24</b>
2.1 Γενικά .....	24
2.2 Μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου .....	26
2.3 Επιλογή των παραμέτρων της μεθόδου.....	30
2.4 Σχέση της μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή με άλλες παρόμοιες μεθόδους .....	31
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 .....</b>	<b>33</b>
<b>ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΙΠΛΗΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ.....</b>	<b>33</b>
3.1 Γενικά .....	33
3.2 Επέκταση της μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή με την εισαγωγή του παράγοντα του υψομέτρου .....	33
3.3 Ομοιότητες και διαφορές με την απλή μέθοδο εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή .....	40

3.4	Υλοποίηση της μεθόδου σε υπολογιστικό περιβάλλον.....	41
3.5	Εφαρμογές.....	41
3.5.1	Εφαρμογή διερεύνησης.....	41
3.5.2	Εφαρμογή της μεθόδου στην Στερεά Ελλάδα για ετήσιες βροχοπτώσεις .....	46
3.6	Συμπεράσματα του Κεφαλαίου 3 .....	53
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4 .....</b>		<b>55</b>
<b>ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ &amp; ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΙΠΛΗΣ</b>		
<b>ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ.....</b>		
		<b>55</b>
4.1	Γενικά .....	55
4.2	Προσαρμογή της μεθόδου σε δύο διαστάσεις.....	55
4.2.1	Ορισμοί .....	55
4.2.2	Υπολογισμός των $d_u$ και $e_u$ .....	58
4.2.3	Υπολογισμός της εκτίμησης $\hat{z}_i$ για τυχαίο σημείο.....	60
4.2.4	Υπολογισμός των μέτρων τραχύτητας της τεθλασμένης επιφάνειας.....	61
4.2.5	Εύρεση και ελαχιστοποίηση της γενικευμένης αντικειμενικής συνάρτησης.....	64
4.3	Υλοποίηση της μεθόδου σε υπολογιστικό περιβάλλον .....	65
4.4	Εφαρμογή της μεθόδου .....	68
4.4.1	Δεδομένα .....	68
4.4.2	Σύγκριση της μεθόδου με την μέθοδο της αντίστροφης απόστασης .....	71
4.4.3	Δημιουργία του βροχομετρικού χάρτη της Στερεάς Ελλάδας.....	73
<b>ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5 .....</b>		<b>78</b>
<b>ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ.....</b>		<b>78</b>
5.1	Γενικά .....	78
5.2	Μελλοντική έρευνα.....	80
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ.....</b>		<b>81</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1 .....</b>		<b>83</b>
<b>ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2 .....</b>		<b>98</b>

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Η παρούσα εργασία αποσκοπεί στην ανάπτυξη, υλοποίηση και εφαρμογή μιας μεθοδολογίας παρεμβολής και εξομάλυνσης δεδομένων σε μία ή δύο διαστάσεις, η οποία βασίζεται σε διαφορετικό μαθηματικό υπόβαθρο από τις διαδεδομένες μεθόδους της βιβλιογραφίας και έχει άμεσες εφαρμογές στη μελέτη της χωρικής κατανομής υδρομετεωρολογικών μεταβλητών.

Η πρωτοτυπία της εργασίας επικεντρώνεται στην εισαγωγή παραμέτρων εξομάλυνσης με ρυθμιζόμενη βαρύτητα σε ένα μοντέλο τεθλασμένα γραμμικής παλινδρόμησης (piecewise linear regression), με γνωστή ισαποχή των σημείων του, το οποίο ανάλογα με την περίπτωση αποτελείται από δύο τεθλασμένες γραμμές ή δύο τεθλασμένες επιφάνειες. Το μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου αναπτύχθηκε τόσο σε μία διάσταση όσο και σε δύο, με σκοπό την όσο δυνατόν πληρέστερη κάλυψη του θέματος και στη συνέχεια υλοποιήθηκε σε λογισμικό, με σκοπό την όσο το δυνατόν μεγαλύτερη ευχρηστία της μεθόδου. Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν δύο εφαρμογές της: η πρώτη για την μία διάσταση, αναπτύχθηκε σε γλώσσα Visual Basic for Applications, και η δεύτερη για τις δύο διαστάσεις, της οποίας οι υπολογιστικές απαιτήσεις είναι πιο αυξημένες, αναπτύχθηκε ως συνδυασμός της γλώσσας Visual Basic for Applications με την γλώσσα Object Pascal. Και οι δύο καλούνται ως συναρτήσεις του ευρέως διαδεδομένου περιβάλλοντος εργασίας MS-Excel δίνοντας την δυνατότητα στο χρήστη-μελετητή να εκμεταλλευτεί τις δυνατότητες του MS-Excel, όσον αφορά την γραφική απεικόνιση και επεξεργασία των αποτελεσμάτων.

Η μέθοδος επαληθεύτηκε με θεωρητικές και πραγματικές εφαρμογές και στις δύο περιπτώσεις. Για τις πραγματικές εφαρμογές, ως περιοχή μελέτης ορίστηκε η Στερεά Ελλάδα και ως μεταβλητές οι τιμές των υπερετήσιων βροχοπτώσεων που έχουν καταγραφεί στους βροχομετρικούς σταθμούς της συγκεκριμένης περιοχής. Ένας από τους στόχους της εργασίας ήταν η παραγωγή του βροχομετρικού χάρτη της Στερεάς Ελλάδας, η οποία επιτεύχθηκε με την εισαγωγή των αποτελεσμάτων της μεθόδου στο Σύστημα Γεωγραφικών Πληροφοριών ARCVIEW. Η μέθοδος εφαρμόστηκε μόνο για υπερετήσιες βροχοπτώσεις.





## EXTENDED ABSTRACT

### 1. Introduction

The present postgraduate thesis aims at the development of a methodology of interpolation and smoothing of data series in one and two dimensions, based on a different mathematical framework than the already proposed methods of the literature and has direct application to the study of the spatial distribution of hydro-meteorological variables.

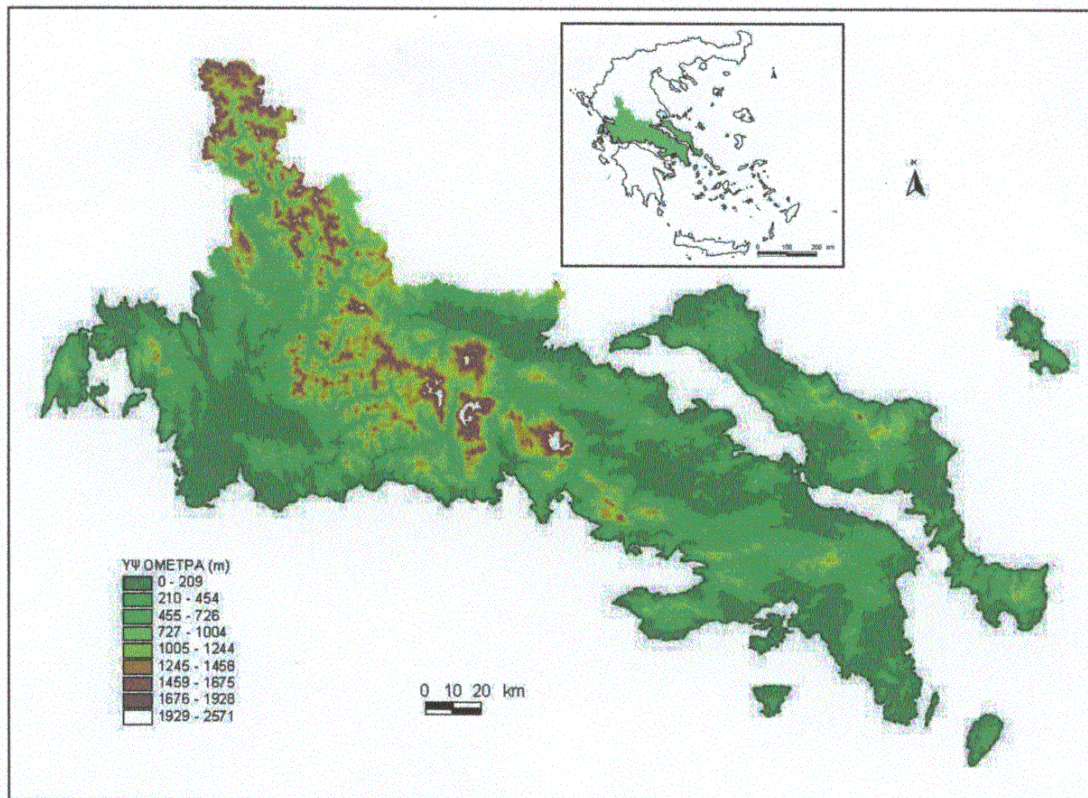
The innovation of the thesis is focused on the introduction of smoothing terms with adjustable weights in a piecewise linear regression model with known break points, consisting of two broken lines. The analysis of the mathematical framework took place in one and two dimensions in order to achieve complete cover of the subject and concluded to the development of two software applications. The first one, concerning one dimension, was written in Visual Basic for Applications while the second, concerning two dimensions, was written in Object Pascal. This was required by the increased computational demands of the method in two dimensions. Both applications are called from the MS-Excel environment as built in functions, providing the user with its increased abilities, concerning the visualization and processing of the results.

The method was verified using theoretical and real-world data, in both cases. For the real world applications the study area was the Sterea Hellas area (Central Greece) (Fig. 1) and as study variable we used the mean annual rainfall as measured in the meteorological stations of the specified area. The objective was the production of the rainfall map of the region. The map was constructed using the Geographical Information System ARCVIEW. The method was applied only for mean annual rainfall, since there was no meaning in using values of smaller time scale, for the production of the rainfall map of an area with the size of Sterea Hellas.

The thesis consists of Chapter 1 (Introduction-Literature Review), four main Chapters (2-5) and two Annexes.

In Chapter 2, the Broken Line Smoothing Method is presented, which was the origin of the methodology and was introduced by Koutsoyiannis (2000).





**Figure 1:** Hypsometrical map of Central Greece

In Chapter 3, there is a detailed analysis of the extension of the Broken Line Smoothing Method (BLSE) and the incorporation of a second explanatory variable which for the needs of this study is the altitude of the region of interest. The method is illustrated using two applications, a theoretical and a real world example and compared to the simple form of the Broken Line Smoothing Method.

In Chapter 4, there is a detailed analysis of the adaptation of the Broken Line Smoothing Extension Method (BLSE) in two dimensions that resulted in the Broken Surface Smoothing Method (BSS). There is also a detailed reference to the software that was developed. Finally, the application of the method in the production of the rainfall map of the Continental Greece is presented and the results are compared to those of the widely spread Inverse Distance Weights (IDW) method.

Chapter 5 summarizes the main points and the conclusions of the study, and suggests related future research topics.

Annexes contain all meteorological and geographical data used, as well as the programs developed for the application of the method.

## 2. Literature review

Several approaches have been devised for estimating regional precipitation from point values. Some of these methods of estimating of the average precipitation over the region of interest estimate directly average precipitation as a weighted average of the measured values. Others are surface-fitting methods that first use the measured values to estimate the precipitation at points in the region of interest and then use some scheme to perform the integration over the region. In some surface-fitting methods the surface does not pass through the known points and these are called smoothing methods, in contrast to the interpolation methods where the surface passes exactly through the known points.

The Direct Weight Averages methods are:

- Arithmetic average
- Thiessen polygons (Thiessen, 1911)
- Bethlahmy's two-axis (Bethlahmy, 1976)

The Surface-fitting methods are:

- "Eyeball" Isohyetal Method (Dingman, 1994)
- Linear interpolation Method
- Inverse Distance Interpolation (Tabios and Salas, 1985)
- Multiquadric Interpolation (Creutin and Obled, 1982; Shaw, 1988)
- Least-Squares Surface Method (Tabios and Salas, 1985)
- Lagrange-Polynomial Surface Method (Tabios and Salas, 1985)
- Spline-Surface Method (Creutin and Obled, 1982)
- Optimal Interpolation / Kriging (Creutin and Obled, 1982; Tabios and Salas, 1985; Davis, 1986; Mamasis, 1997 (in Greek))
- Hypsometric Method (Dingman, 1994)



### 3. The Double Broken Line / Surface Smoothing approach

The Double Broken Line / Surface Smoothing methodology that is studied herein is based on a piecewise linear regression model with known break points. The model consists of two broken lines, with the second one representing the effect of the altitude to the final results. The introduction of smoothing terms into the linear regression model, provides the necessary smoothness of the results and the flexibility of the method.

#### Methodology

The general methodology is better understood in one dimension, so we will describe it in one dimension. The differences between one and two dimensions refer mainly to the definitions of the involved matrices.

#### *Mathematical framework*

Let  $(x_i, y_i)$  be a set of  $n$  points at the  $x y$  plane for  $i = 1, \dots, n$ . Let  $c_j, j = 0, \dots, m, m+1$  points of the  $x$ -axis so that the interval  $[c_0, c_m]$  contain all  $x_i$ . For simplicity we will assume that the points are equidistant, i.e.  $c_j - c_{j-1} = \delta$ . Also for every  $x$  point we know the value of a parameter  $t$ , which, for the needs of this study, represents the altitude. Therefore, for each point  $(x_i, y_i)$  there corresponds a value  $t(x_i)$ , for  $i=1, \dots, n$  and for each point  $(c_j, y_j)$  there corresponds a value  $t(c_j)$ , for  $j=0, \dots, m$ .

We make the assumption that the dependent variable  $y$  in every position  $x$  can be expressed as a linear function of the altitude  $t$ , i.e.

$$y = d + e t \quad (1)$$

where  $d$  and  $e$  are coefficients, with their values changing according to  $x$ . Their variation is expressed from two broken piecewise straight lines. At the vertices of the broken lines the above relationship becomes:

$$y_j = d_j + e_j t_j \quad (2)$$

We wish to find the  $m+1$  values  $d_j$  and  $e_j$  in the  $y$ -axis, so that the curve which is defined by the  $m+1$  points  $(c_j, d_j + t_j e_j)$  and constitutes from a combination of the two broken lines and of the  $t(x)$  curve, 'fits' the set of points  $(x_i, y_i)$ . This fit is meant in terms of minimizing the total square error among the set of original points  $(x_i, y_i)$  and the fitted curve, i.e.

terms of minimizing the total square error among the set of original points  $(x_i, y_i)$  and the fitted curve, i.e.

$$p = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3)$$

where  $\hat{y}_i$  is the estimate of  $y_i$  given by the broken line for the known  $x_i$ .

In matrix form this can be written as:

$$p = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 \quad (4)$$

with

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} \quad (5)$$

where  $\mathbf{y} = [y_0, \dots, y_n]^T$  is the vector of known ordinates of the given data points with size  $n$  (the exponent  $T$  denotes the transpose of a matrix or vector),  $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_n]^T$  is the vector of estimates with size  $n$ ,  $\mathbf{d} = [d_0, \dots, d_m]^T$  is the vector of the unknown ordinates of the broken line  $d$  and  $\mathbf{e} = [e_0, \dots, e_m]^T$  is the vector of the unknown ordinates of the broken line  $e$ .  $\mathbf{T}$  is a diagonal matrix with its elements:

$$\mathbf{T} = \text{diag}(t(x_1), \dots, t(x_n)) \quad (6)$$

where  $t(x_1), \dots, t(x_n)$  are the values of the altitude at the given data points.  $\mathbf{\Pi}$  is a matrix with size  $n \times (m+1)$  and  $ij$ th entry (for  $i=1, \dots, n; j=0, \dots, m$ ):

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{x_i - c_{j-1}}{\delta}, & c_{j-1} < x_i \leq c_j \\ \frac{c_{j+1} - x_i}{\delta}, & c_j < x_i \leq c_{j+1} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

Following that, we add two requirements in order to avoid a very rough shape of both broken lines  $d$  and  $e$  and also assuring a unique solution. To acquire a measure of the roughness of the broken line, we considered the differences of slopes between two consecutive segments of the broken line  $d$  and the broken line  $e$ , so that the following expressions can be appropriate measures for the roughness of the entire broken line:

$$q_d = \sum_{j=1}^{m-1} (2d_j - d_{j-1} - d_{j+1})^2 \quad (8)$$

and

$$q_e = \sum_{j=1}^{m-1} (2e_j - e_{j-1} - e_{j+1})^2 \quad (9)$$

and

$$q_e = \mathbf{e}^T \Psi^T \Psi \mathbf{e} \quad (11)$$

where  $\Psi$  is a matrix with size  $(m-1) \times (m+1)$  and  $ij$ th entry:

$$\psi_{ij} = \begin{cases} 2, & j=i+1 \\ -1, & |j-i-1|=1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

Apparently,  $\Psi^T \Psi = \mathbf{0}$  for the special case  $m=1$ .

Combining equations (4), (5), (10), (11) and introducing a dimensionless multiplier  $\lambda \geq 0$  for  $q_d$  and one more  $\mu \geq 0$  for  $q_e$ , we get the more generalized objective function to be minimized:

$$f(\mathbf{d}, \mathbf{e}) := p + \lambda q_d + \mu q_e = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 + \lambda \mathbf{d}^T \Psi^T \Psi \mathbf{d} + \mu \mathbf{e}^T \Psi^T \Psi \mathbf{e} \quad (13)$$

The solution of the above equation is obtained after applying the typical rules of derivatives involving matrices and it has the following form:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi^T \Pi + \lambda \Psi^T \Psi & \Pi^T \mathbf{T} \Pi \\ \Pi^T \mathbf{T} \Pi & \Pi^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \Pi + \mu \Psi^T \Psi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Pi^T \mathbf{y} \\ \Pi^T \mathbf{T}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (14)$$

The corresponding relationship in the case of two dimensions is:

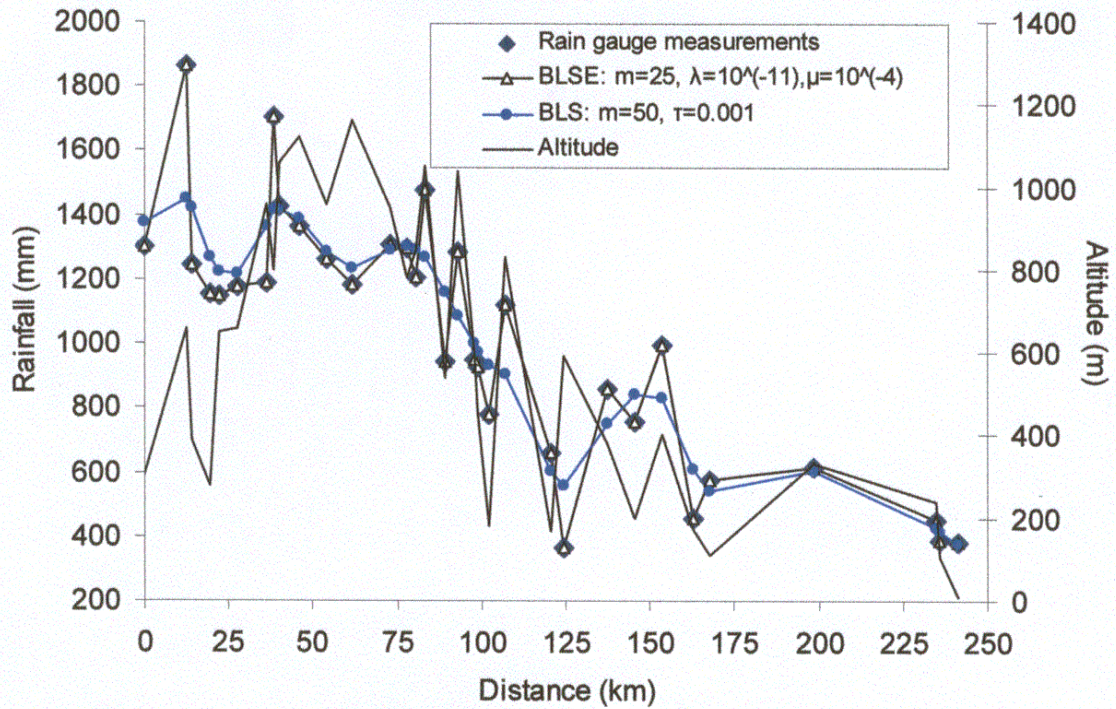
$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi^T \Pi + \lambda_x \Psi_x^T \Psi_x + \lambda_y \Psi_y^T \Psi_y & \Pi^T \mathbf{T} \Pi \\ \Pi^T \mathbf{T} \Pi & \Pi^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \Pi + \mu_x \Psi_x^T \Psi_x + \mu_y \Psi_y^T \Psi_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Pi^T \mathbf{z} \\ \Pi^T \mathbf{T}^T \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (15)$$

where  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  and  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  are the smoothing terms according to two dimensions and  $\Psi_x$ ,  $\Psi_y$  are the equivalents of the matrix  $\Psi$  in each direction.

#### 4. Conclusions

The proposed interpolation and smoothing techniques can be used for data analysis in several purposes such as interpolation and smoothing. In addition, they can incorporate, in an objective manner, the effect of an explanatory variable which for the needs of this study is the altitude of the region of interest.

In this context it may substitute other methods such as locally weighted regression and cubic splines. The methodology is closely related to smoothing splines, the main difference being the simpler mathematical expression of the former, as it comprises simply a concatenation of straight-line segments in one dimension and a second-degree surface segments in two dimensions.



**Figure 2:** Comparison of the extension (triangles) with the early (filled circles) broken line smoothing method

In case of one dimension the model includes three adjustable parameters, which are: **a)** the weights of the two smoothing terms and **b)** the number of linear segments. On the other hand, in two dimensions the number of the adjustable parameters is doubled, since we add the two smoothing terms and the number of linear segments for the second dimension. The model is fully parametrical and thus flexible, and suitable for analyzing several physical problems.

A remarkable property of the broken Line / Surface smoothing techniques is the fact that the resolution (i.e. the length of the consecutive segments) neither in one dimension nor in two, must coincide with that of the given data points, but it can be chosen either finer or coarser, depending on the problem of interest. The selectable resolution, independent of the data points may be an advantage in certain cases such as, when the data points are too many, or too few, or they are quite non-uniformly distributed. We must emphasize that the application of the method with small resolution (thus reducing its computational demands) resulted in good quality results.

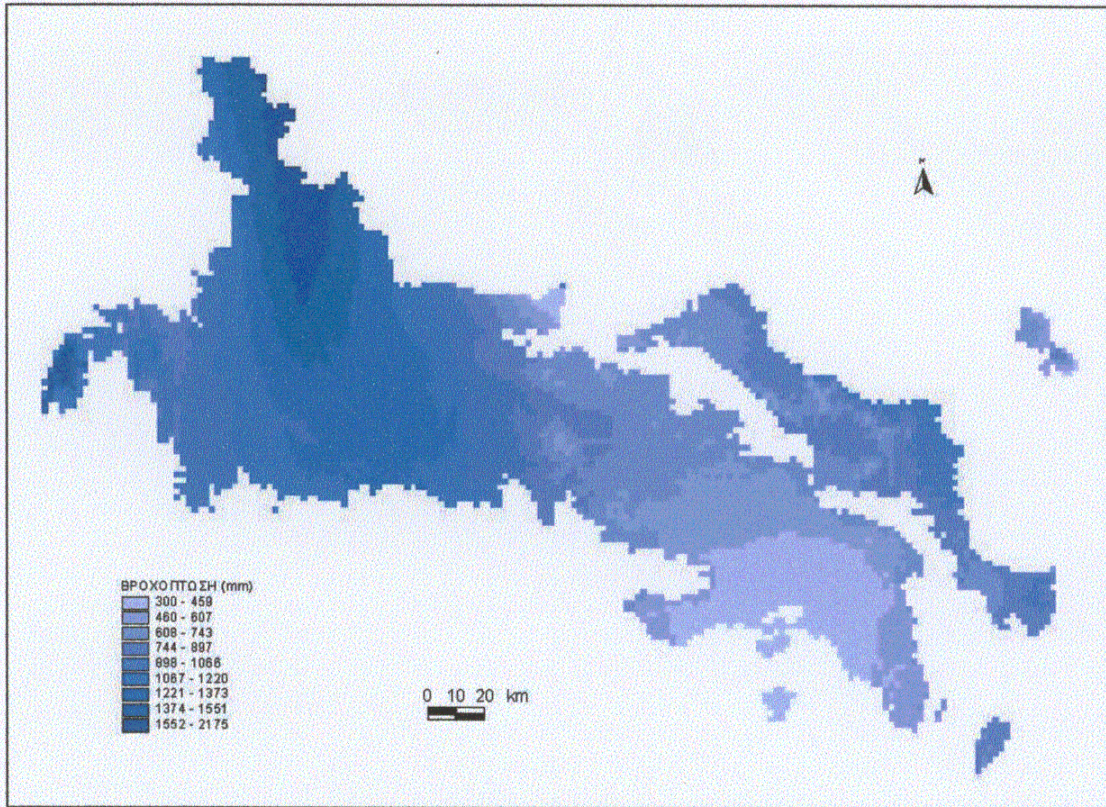
The comparison with the early version of broken line smoothing (BLS) (Koutsoyiannis, 2000), demonstrated that the double broken line method (BLSE)

outperforms, especially when we used small resolution. The biggest differences occurred at the points that we had significant variations of the  $t$  parameter (see Fig. 2).

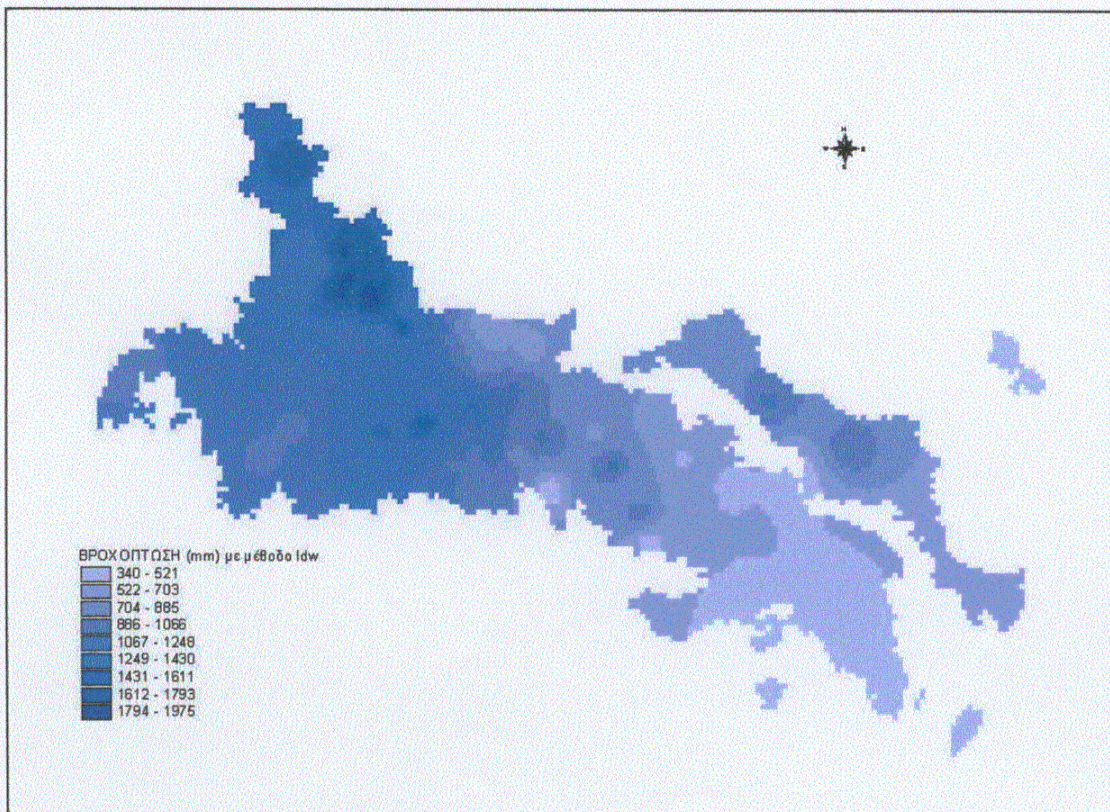
The method was applied for the spatial interpolation of rainfall data at the Sterea Hellas area (Central Greece) (see Fig. 3). The comparison with the results of the Inverse Distance Weights method (see Fig. 4), which was also applied at the same region, shows that the method can produce more reliable results. We emphasize the method's ability to incorporate the hypsometrical information and thus its results are more reliable given the fact that the meteorological and hydrological services prefer to install rain gauges to the easiest accessible locations, leaving the mountainous areas uncovered. This characteristic is very important as it avoids underestimation of the rainfall.

In general, the presented applications proved that the method is suitable for handling data series of hydro-meteorological variables by performing smoothing or interpolation between data points, according to the weights of the smoothing terms. In this way, the method's results are able to reflect the variations of physical phenomena, which are ruled by complicated laws.





**Figure 3:** Rainfall map of Central Greece, according to the results of the BSS method



**Figure 4:** Rainfall map of Central Greece, according to the results of the IDW method



## ΕΙΣΑΓΩΓΗ

### 1.1 Γενικά

Οι επιστήμονες που ασχολούνται με τις υδρομετεωρολογικές μεταβλητές και ειδικά με τα ατμοσφαιρικά κατακρημνίσματα, σε ορισμένες περιπτώσεις ενδιαφέρονται για πληροφορίες που σχετίζονται με ολόκληρες περιοχές, παρά πληροφορίες που αφορούν μεμονωμένα σημεία. Διάφορες προσεγγίσεις έχουν εφαρμοστεί για την ολοκλήρωση της σημειακής βροχομετρικής πληροφορίας στο σύνολο της επιφάνειας μιας λεκάνης απορροής. Αυτές εμπίπτουν σε δύο γενικές κατηγορίες (Dingman, 1994): *άμεσης ολοκλήρωσης*, στις οποίες γίνεται άμεση χρήση των σημειακών μετρήσεων, και *προσαρμογής επιφάνειας* (surface fitting), στις οποίες πριν από την επιφανειακή ολοκλήρωση γίνεται αναπαράσταση της γεωγραφικής μεταβολής της βροχόπτωσης. Οι πρώτες μέθοδοι είναι απλούστερες, αλλά οι δεύτερες έχουν το σημαντικό πλεονέκτημα να αναδεικνύουν την γεωγραφική μεταβλητότητα των διαφόρων μεταβλητών, γεγονός που αποκτά ιδιαίτερη αξία τόσο για την κατανόηση των φαινομένων που λαμβάνουν χώρα, όσο και για τον έλεγχο της αξιοπιστίας των μετρήσεων αλλά και των αποτελεσμάτων που προκύπτουν.

Είναι πολύ σημαντικό το να έχουμε υπόψη μας ότι ανεξάρτητα από την μέθοδο που θα ακολουθήσουμε, η αξιοπιστία του τελικού αποτελέσματος εξαρτάται πρωτίστως από την πυκνότητα της σημειακής πληροφορίας: η επιτυχία της ολοκλήρωσης είναι ανάλογη του αριθμού των βροχομετρικών σταθμών, που περιλαμβάνει το δίκτυο της περιοχής. Ένα από τα μεγαλύτερα προβλήματα του Ελληνικού χώρου, είναι το ότι τα δίκτυα σπανίως έχουν μεγάλη πυκνότητα, ενώ σε ορισμένες ορεινές δυσπρόσιτες περιοχές οι σταθμοί σπανίζουν.

#### 1.1.1 Παράγοντες γεωγραφικής μεταβλητότητας

Η γεωγραφική μεταβλητότητα των κατακρημνισμάτων επηρεάζεται από πολλούς παράγοντες, πολλοί από τους οποίους συνδέονται με τον στοχαστικό χαρακτήρα της εξέλιξης των ατμοσφαιρικών συστημάτων που τα παράγουν

(Κουτσογιάννης, 1997, σ. 129). Ωστόσο, σε υπερετήσια κλίμακα γίνονται εμφανείς οι επιδράσεις τουλάχιστον δύο παραγόντων: της γεινίασης με την θάλασσα και της ορογραφίας.

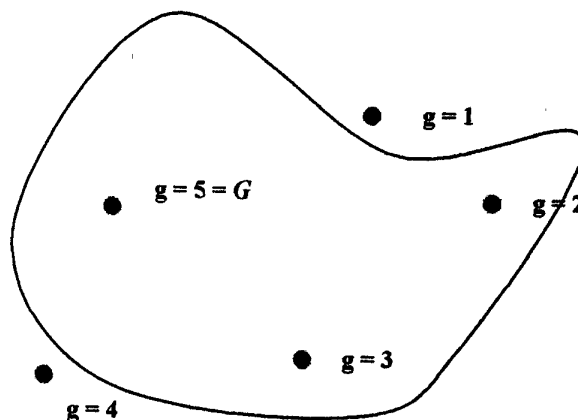
Ο πρώτος παράγοντας επαληθεύεται μόνο στην περίπτωση που στην υπό μελέτη περιοχή πνέουν άνεμοι με διεύθυνση από την θάλασσα προς την ξηρά, οπότε παρατηρείται μείωση του μέσου ετήσιου ύψους βροχής ανάλογα με την αύξηση της απόστασης από την θάλασσα.

Οι επιδράσεις της ορογραφίας ποικίλουν. Καθώς εκτεταμένες οροσειρές παρεμβάλλονται στην πορεία των ανέμων, προκαλούν υγροποίηση της μεταφερόμενης υγρασίας και συνεπώς κατακρήμνισή της, σε διάφορες μορφές, στην προσήνεμη πλευρά της οροσειράς. Το αποτέλεσμα αυτής της διεργασίας είναι η πτώση των μέσων υψών βροχής στην υπήνεμη πλευρά, που χαρακτηριστικά ονομάζεται περιοχή ομβροσκιάς. Άλλη επίδραση της ορογραφίας, είναι η αύξηση του ύψους βροχής με την αύξηση του τοπογραφικού υψομέτρου. Το μέγεθος που αναπαριστά τη συγκεκριμένη μεταβολή είναι η *βροχομετρική βαθμίδα*, δηλαδή η ανά μονάδα υψομέτρου μέση αύξηση του ύψους βροχής σε mm, και αποτελεί χαρακτηριστικό της κάθε περιοχής.

## 1.2 Βιβλιογραφική επισκόπηση

### Γενικά

Για να μπορέσουμε να ορίσουμε το φυσικό πρόβλημα της επιφανειακής



**Σχήμα 2-1:** Το γενικό πρόβλημα της επιφανειακής ολοκλήρωσης από σημειακές μετρήσεις. Στόχος είναι η εκτίμηση της μέσης βροχοπτώσης, στην ορισμένη περιοχή από μετρήσεις στα σημεία  $g = 1, 2, \dots, G$ .

ολοκλήρωσης, ας θεωρήσουμε την περιοχή του Σχήματος 2-1. Μαθηματικά, η μέση κατακρήμνιση σε αυτή τη περιοχή εκφράζεται από την σχέση:

$$P = \frac{1}{A} \int \int_A p(x, y) dx dy \quad (1.1)$$

όπου  $A$  είναι το εμβαδόν της περιοχής,  $x$  και  $y$  αντιπροσωπεύουν τις καρτεσιανές συντεταγμένες των σημείων της περιοχής, και  $p(x, y)$  είναι η τιμή της βροχόπτωσης σε όλα αυτά τα σημεία, η οποία είναι γνωστή μέσω των μετρήσεων που έχουν γίνει.

Στη συνέχεια παρουσιάζονται οι κυριότερες μέθοδοι που έχουν αναπτυχθεί για την επιφανειακή ολοκλήρωση της βροχόπτωσης.

### 1.2.1 Μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης

Οι μέθοδοι αυτής της κατηγορίας χρησιμοποιούν την γενική εξίσωση:

$$\hat{P} = \sum_{g=1}^G u_g p_g \quad (1.2)$$

όπου  $u_g$  είναι ο συντελεστής βάρους για το σταθμό με τον αριθμό  $g$ , που ικανοποιούν την συνθήκη:

$$\sum_{g=1}^G u_g = 1, \quad 0 \leq u_g \leq 1 \quad (1.3)$$

και  $p_g$  είναι το σημειακό ύψος βροχής του αντίστοιχου σταθμού. Υπάρχουν διάφορες θεωρήσεις για την εκτίμηση των συντελεστών βάρους, οπότε προκύπτουν αντίστοιχα και διαφορετικές μέθοδοι άμεσης ολοκλήρωσης, οι κυριότερες είναι οι εξής:

#### Μέθοδος Αριθμητικού Μέσου

Στην μέθοδο του αριθμητικού μέσου, οι συντελεστές βάρους στην εξίσωση (1.3) λαμβάνονται ίσοι με την τιμή  $(1/G)$  για όλους τους σταθμούς που εξετάζουμε. Με αυτό τον τρόπο η επιφανειακή ολοκλήρωση συμπίπτει με τον μέσο όρο των τιμών που μετρήθηκαν στους σταθμούς παρατήρησης με βάση τη σχέση:

$$\hat{P} = \frac{1}{G} \sum_{g=1}^G p_g \quad (1.4)$$

Η μέθοδος λόγω της απλότητάς της μπορεί να χρησιμοποιηθεί για χονδρικές εκτιμήσεις αλλά όχι για οριστικές. Παρέχει ανεκτή ακρίβεια μόνο όταν η περιοχή

είναι σχετικά επίπεδη, οι σταθμοί ομοιόμορφα κατανεμημένοι σε αυτή και τα ύψη βροχής δεν διαφέρουν πολύ από σταθμό σε σταθμό.

#### **Μέθοδος των Πολυγώνων Thiessen (Thiessen, 1911)**

Στην μέθοδο των πολυγώνων Thiessen, η περιοχή χωρίζεται σε  $G$  υποπεριοχές, που η κάθε μια έχει περίπου στο κέντρο της τον αντίστοιχο σταθμό μέτρησης. Οι υποπεριοχές ορίζονται με τέτοιο τρόπο, ώστε όλα τα σημεία της κάθε μιας να είναι πιο κοντά στο σταθμό μέτρησης της περιοχής τους από ότι στους άλλους σταθμούς. Όταν καθοριστούν οι  $G$  αυτές υποπεριοχές και μετρηθούν τα αντίστοιχα εμβαδά,  $a_g$ , τότε οι συντελεστές βάρους καθορίζονται ως:  $u_g = a_g / A$  και η επιφανειακή ολοκλήρωση γίνεται με βάση τον τύπο:

$$\hat{P} = \frac{1}{A} \sum_{g=1}^G a_g p_g \quad (1.5)$$

Οι περιορισμοί της εξίσωσης (1.3) ικανοποιούνται γιατί:  $\sum_{g=1}^G a_g = A$ .

Η κατασκευή των υποπεριοχών γίνεται με μια απλή γεωμετρική κατασκευή βασισμένη στις μεσοκαθέτους των ευθύγραμμων τμημάτων που συνδέουν τους σταθμούς ανά ζεύγη. Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω σε αυτή την μέθοδο, ο αναγνώστης μπορεί να αναφερθεί στην Μιμίκου (1994, σ. 28) ή στους Κουτσογιάννη & Ξανθόπουλο (1997, σ. 131).

#### **Μέθοδος των Δύο Αξόνων του Bethlahmy (Bethlahmy, 1976)**

Η μέθοδος των δύο αξόνων η οποία αναπτύχθηκε από τον Bethlahmy, εξάγει τιμές των  $u_g$  που αντικατοπτρίζουν την εγγύτητα του κάθε σταθμού μέτρησης στο κέντρο της συνολικής περιοχής, παρά στην περιοχή που σχετίζεται με τον κάθε σταθμό. Για να υπολογιστούν αυτοί οι συντελεστές βάρους, πρέπει πρώτα να χαράξουμε την μεγαλύτερη δυνατή σε μήκος ευθεία γραμμή που μπορεί να χαραχθεί στην περιοχή μελέτης. Στη συνέχεια χαράσσουμε την μεσοκάθετο αυτού του ευθύγραμμου τμήματος, το δευτερεύοντα άξονα. Ο κύριος άξονας, χαράσσεται σαν μεσοκάθετος του δευτερεύοντα άξονα. Στη συνέχεια φέρνουμε από τον κάθε σταθμό δύο γραμμές: μια στην πιο απομακρυσμένη πλευρά του κύριου άξονα και μια στη πιο απομακρυσμένη πλευρά του δευτερεύοντα άξονα. Η γωνία που σχηματίζεται από τις



δύο αυτές γραμμές,  $\alpha_g$ , ονομάζεται γωνία επιρροής και είναι πάντα μικρότερη των  $90^\circ$ .

Στη συνέχεια υπολογίζουμε το άθροισμα όλων των γωνιών,  $\overset{\circ}{A}$ , ως εξής:

$$\overset{\circ}{A} = \sum_{g=1}^G \alpha_g \quad (1.6)$$

Οι συντελεστές βάρους ορίζονται στην συνέχεια ως:  $u_g = \alpha_g / \overset{\circ}{A}$ , και η μέση βροχόπτωση είναι:

$$\overset{\circ}{P} = \frac{1}{\overset{\circ}{A}} \sum_{g=1}^G \alpha_g p_g \quad (1.7)$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες πάνω σε αυτή την μέθοδο, ο αναγνώστης μπορεί να αναφερθεί στους Κουτσογιάννη & Ξανθόπουλο (1997, σ. 131-133).

### 1.2.2 Μέθοδοι προσαρμογής επιφάνειας

Στις μεθόδους προσαρμογής επιφάνειας οι μετρήσεις χρησιμοποιούνται για να οριστεί μια επιφάνεια η οποία αναπαριστά την βροχόπτωση σε οποιοδήποτε σημείο της περιοχής που ενδιαφέρει. Οπότε αυτή η επιφάνεια είναι ένα μοντέλο της χωρικής μεταβλητότητας της συγκεκριμένης τιμής της βροχόπτωσης (μέση ή συνολική για κάποια χρονική περίοδο), το οποίο μπορεί να παρασταθεί σε χάρτη. Οι προσεγγίσεις που ακολουθούνται διαφέρουν ως προς τις μεθόδους που χρησιμοποιούν για να κατασκευάσουν αυτή την επιφάνεια. Σε μερικές, οι οποίες ονομάζονται, μέθοδοι εξομάλυνσης (smoothing methods), αυτή η επιφάνεια δε διατηρεί τις μετρημένες σημειακές τιμές, ενώ όταν η επιφάνεια διατηρεί τις μετρημένες σημειακές τιμές, οι μέθοδοι ονομάζονται μέθοδοι παρεμβολής (interpolation methods).

Μια δεύτερη διάκριση των μεθόδων προσαρμογής επιφάνειας είναι σε στατιστικές – στοχαστικές (statistical – stochastic methods) και σε προσδιοριστικές μεθόδους (deterministic methods). Οι πρώτες βασίζονται στην αρχή της ελαχιστοποίησης των σφαλμάτων παρεμβολής στα σημεία της επιφάνειας που δεν υπάρχουν σημειακές μετρήσεις, ενώ οι δεύτερες παράγουν επιφάνειες με την χρήση άλλων μαθηματικών κριτηρίων. Πλεονέκτημα των στατιστικών μεθόδων είναι ότι έχουν την δυνατότητα να υπολογίσουν το σφάλμα παρεμβολής σε κάθε σημείο της περιοχής. Η απεικόνιση της επιφάνειας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: με τις *ισοϋέτιες καμπύλες* και με την *ψηφιδωτή διαμέριση*.



Η ισοϋέτια καμπύλη ορίζεται από τον γεωμετρικό τόπο των σημείων στα οποία το ύψος βροχής, παίρνει μια συγκεκριμένη τιμή. Η μέση βροχόπτωση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές καμπύλες προκύπτει από την σχέση:

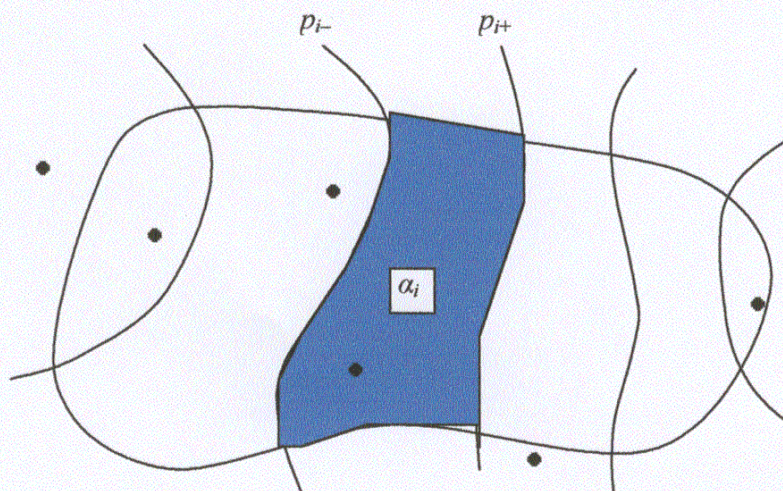
$$\hat{p}_i = \frac{1}{2}(p_{i-} + p_{i+}) \quad (1.8)$$

όπου  $p_{i-}$  και  $p_{i+}$  είναι οι τιμές των διαδοχικών καμπύλων που ορίζουν την περιοχή  $i$  (Σχήμα 2-4).

Η συνολική βροχόπτωση της περιοχής θα είναι:

$$\hat{P} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^I a_i \hat{p}_i \quad (1.9)$$

όπου  $I$  είναι ο συνολικός αριθμός των επιφανειών που έχει χωριστεί η περιοχή και  $a_i$



**Σχήμα 2-4:** Η μέθοδος των ισοϋέτιων καμπύλων. Οι κουκίδες αναπαριστούν τις σημειακές μετρήσεις, οι γραμμές είναι οι ισοϋέτιες και η σκιασμένη ζώνη είναι η περιοχή  $a_i$ , μεταξύ των  $p_{i-}$  και  $p_{i+}$  ισοϋέτιων.

είναι το εμβαδόν μεταξύ των διαδοχικών καμπυλών.

Οι αλγόριθμοι προσαρμογής επιφάνειας και δημιουργίας ισοϋέτιων καμπυλών ακολουθούν τα παρακάτω βήματα:



1. Δημιουργείται ο κάνναβος της περιοχής ενδιαφέροντος. Το μέγεθος του καννάβου εξαρτάται από τον μελετητή, αλλά συνήθως είναι το 1/10 της μέσης απόστασης μεταξύ των σταθμών. Συμβολίζουμε τον συνολικό αριθμό των κόμβων του καννάβου με  $J$ .
2. Οι τιμές της βροχόπτωσης σε κάθε σημείο του καννάβου εκτιμώνται σύμφωνα με τον τύπο:

$$\hat{p}_j = \sum_{g=1}^G w_{jg} \hat{p}_g \quad (1.10)$$

όπου  $\hat{p}_j$ , είναι η εκτίμηση της βροχόπτωσης στο σημείο  $j$ ,  $p_g$  είναι η μέτρηση στον σταθμό  $g$ , και  $w_{jg}$  είναι το βάρος που αντιστοιχεί στο συγκεκριμένο σταθμό και το συγκεκριμένο σημείο. Για να διασφαλίσουμε την αμεροληψία της  $P$ , οι περισσότερες μέθοδοι εισάγουν τον περιορισμό ότι το άθροισμα των βαρών για κάθε σημείο πρέπει να είναι ίσο με μονάδα, δηλαδή:

$$\sum_{g=1}^G w_{jg} = 1 \quad (1.11)$$

3. Αφού εκτιμηθούν οι τιμές  $\hat{p}_j$ , ένας άλλος αλγόριθμος ελέγχει την διαφορά μεταξύ των γειτονικών κόμβων και καθορίζει πως ακριβώς θα σχεδιαστούν οι ισοϋέτιες καμπύλες.

Σύμφωνα με την μέθοδο της ψηφιακής διαμέρισης, η περιοχή ολοκλήρωσης διαμερίζεται σε ισομεγέθη στοιχειώδη κύτταρα ή ψηφίδες με την εφαρμογή ενός ορθογωνικού καννάβου με δεδομένη ισαποχή των οριζόντιων και κατακόρυφων γραμμών του. Στην συνέχεια, για κάθε κύτταρο, υπολογίζεται η τιμή του ύψους βροχής, η οποία αντιστοιχεί στο κέντρο του κυττάρου αλλά θεωρείται σταθερή για όλη την επιφάνεια του κυττάρου. Η τιμή  $\hat{P}$  προκύπτει, τότε, ως ο μέσος όρος των τιμών όλων των κυττάρων. Παρακάτω γίνεται αναφορά σε ορισμένες από τις μεθόδους προσδιορισμού της επιφάνειας, η οποία αναπαριστά την βροχόπτωση στο τυχόν σημείο της υπόψη περιοχής (βλ. Κουτσογιάννης & Ξανθόπουλος, 1997, σ. 136-138 και Dingman, 1994, σ. 113-122).

**Μέθοδος γραφικής χάραξης των ισοϋέτιων (Dingman, 1994)**

Πρόκειται για μια συνηθέστατη μέθοδο, στην οποία ο μελετητής χαράσσει τις ισοϋέτιες γραφικά πάνω σε χάρτη, στον οποίο έχει προηγουμένως σημειώσει τις θέσεις των βροχομετρικών σταθμών και τα ύψη βροχής σε αυτές. Για την χάραξη των καμπυλών χρησιμοποιεί κατά βάση γραμμική παρεμβολή πάνω στα ευθύγραμμα τμήματα που ορίζονται από τις θέσεις γειτονικών σταθμών. Παράλληλα αξιοποιεί την εμπειρία και την κρίση του, ξεφεύγοντας από την αυστηρή γραμμική παρεμβολή, προκειμένου να βελτιώσει κατά περιοχές την χάραξη των καμπυλών.

**Μέθοδος υπολογιστικής γραμμικής παρεμβολής**

Η μέθοδος της γραμμικής παρεμβολής μπορεί εύκολα να γίνει με την χρήση υπολογιστή, χωρίς φυσικά την υποκειμενική παρέμβαση του μελετητή.

**Μέθοδος της αντίστροφης απόστασης (Tabios and Salas, 1985)**

Στην μέθοδο αυτή τα βάρη της εξίσωσης (1.10) είναι συνάρτηση μόνον της απόστασης μεταξύ των  $J$  σημείων του καννάβου και των  $G$  σταθμών μέτρησης. Έτσι, για ένα σημείο  $j = r$ , το βάρος της μέτρησης για το σταθμό  $g = s$ , είναι:

$$w_{rs} = \frac{d(r, s)^{-b}}{\sum_{g=1}^G d(r, g)^{-b}} \quad (1.12)$$

όπου  $d(r, s)$  είναι η απόσταση μεταξύ του σημείου του καννάβου και του σταθμού, και ο εκθέτης  $b$  είναι μια αυθαίρετα εκλεγμένη παράμετρος που συνήθως παίρνει τιμές 1 ή 2 ανάλογα με το αν θέλουμε πρώτου ή δευτέρου βαθμού βάρη.

**Μέθοδος πολυτετραγωνικής παρεμβολής (Creutin and Obled, 1982; Shaw, 1988)**

Όπως και η μέθοδος της αντίστροφης απόστασης, η μέθοδος της πολυτετραγωνικής παρεμβολής για τον προσδιορισμό του ύψους βροχής στο τυχόν σημείο της επιφάνειας χρησιμοποιεί τις αποστάσεις του σημείου από τους γειτονικούς σταθμούς. Ειδικότερα, η εξίσωση της επιφάνειας της βροχόπτωσης προκύπτει ως άθροισμα των επιρροών των γειτονικών σταθμών, όπου κάθε επιρροή περιγράφεται μαθηματικά από μια ορθή κωνική με κατακόρυφο άξονα τοποθετημένο στην θέση κάθε σταθμού.

**Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων με πολυώνυμα (Tabios and Salas, 1985)**

Η μέθοδος στηρίζεται στην επιλογή ενός πολυωνύμου δεδομένου βαθμού, το οποίο εκφράζει το ύψος βροχής συναρτήσει των τοπογραφικών συντεταγμένων  $x$  και  $y$  των σημείων της περιοχής. Η εκτίμηση των συντελεστών του πολυωνύμου γίνεται με τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται το σφάλμα προσαρμογής στα σημεία γνωστού ύψους βροχής.

**Μέθοδος πολυωνύμων Lagrange (Tabios and Salas, 1985)**

Πρόκειται για μέθοδο παραπλήσια με την προηγούμενη, αλλά με τη διαφορά ότι ο αριθμός των πολυωνυμικών όρων είναι ίσος με τον αριθμό των βροχομετρικών σταθμών, οπότε η πολυωνυμική έκφραση διέρχεται ακριβώς από τα σημεία γνωστού ύψους βροχής. Μειονέκτημα της μεθόδου αποτελεί ο μεγάλος βαθμός του πολυωνύμου, ο οποίος μπορεί να προκαλέσει αδικαιολόγητα υψηλές διακυμάνσεις της επιφάνειας βροχής από θέση σε θέση.

**Μέθοδος προσαρμογής splines (Creutin and Obled, 1982)**

Αντί της προσαρμογής μιας ενιαίας πολυωνυμικής έκφρασης σε ολόκληρη την περιοχή μελέτης, προσαρμόζονται τοπικές πολυωνυμικές εκφράσεις παρεμβολής μικρού βαθμού, αποφεύγοντας έτσι το πρόβλημα των πολύ υψηλών διακυμάνσεων της επιφάνειας.

Συνήθως αυτές οι εκφράσεις είναι τμήματα κυβικών πολυωνυμικών συναρτήσεων που ενώνονται στην τετμημένη  $x_i$  κάθε δεδομένου σημείου με τρόπο ώστε να εξασφαλίζουν την συνέχεια της συνάρτησης καθώς και τις πρώτες και τις δεύτερες παραγώγους της. Για αν επιτευχθεί η εξομάλυνση, λαμβάνεται υπόψη (και ελαχιστοποιείται) η συνολική καμπυλότητα (ή αντιθέτως τραχύτητα) της spline, υπό τον περιορισμό ότι το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα της εκτίμησης στα δεδομένα σημεία  $(x_i, y_i)$  δεν ξεπερνά μια συγκεκριμένη τιμή (Reinsch, 1967). Με συνεχείς βελτιώσεις (Craven and Wahba, 1979; Hutchinson and de Hoog, 1985) το ποσό του θορύβου δεν είναι απαραίτητο να καθοριστεί εξαρχής, αλλά μπορεί να εκτιμηθεί από τα δεδομένα με αντικειμενικό τρόπο.

**Μέθοδος βέλτιστης παρεμβολής (kriging) (Creutin and Obled, 1982; Tabios and Salas, 1985; Μαμάσης, 1997)**

Η βέλτιστη παρεμβολή είναι ένας γενικός όρος για μια ομάδα στατιστικών μεθόδων στην οποία τα βάρη της εξίσωσης (1.10) προκύπτουν με την ελαχιστοποίηση της διασποράς του σφάλματος παρεμβολής,  $S^2(e_j)$ , όπου:

$$S^2(e_j) = S^2(\hat{p}_j - p_j) \quad (1.13)$$

με τον όρο  $\hat{p}_j$ , να δίνεται από την εξίσωση (1.10).

Η ελαχιστοποίηση της συνάρτησης της διασποράς υπό τους περιορισμούς:

- 1) Δεν υπάρχει χωρική τάση της βροχόπτωσης και
- 2) Το άθροισμα των βαρών είναι ίσο με την μονάδα,

οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων που μπορεί να επιλυθεί για τον υπολογισμό των βαρών και σε ένα δεύτερο που εκφράζει το μέγεθος της διασποράς του σφάλματος παρεμβολής, σε κάθε σημείο του καννάβου.

Οι διαφορές μεταξύ των μετρήσεων της βροχόπτωσης σε γειτονικά σημεία είναι κατά μέσο όρο μικρότερες από αυτές μεταξύ απομακρυσμένων σημείων. Ένας τρόπος έκφρασης αυτής της χωρικής συσχέτισης είναι με τον συντελεστή χωρικής συσχέτισης μεταξύ των τιμών της βροχής σε διάφορες αποστάσεις. Οι λύσεις του συστήματος των εξισώσεων που ελαχιστοποιούν το σφάλμα  $S^2(e_j)$ , στην εξίσωση (1.13) εξαρτώνται από τον ακριβή τρόπο που ο συντελεστής χωρικής συσχέτισης αυξάνει με τις συγκεκριμένες αποστάσεις.

Η μέθοδος έχει διάφορες παραλλαγές όπως:

- **Ordinary – Simple Kriging.** Είναι η πλέον διαδεδομένη μορφή, και έχει τις παρακάτω παραδοχές: α) η μεταβλητή ακολουθεί κανονική κατανομή, β) η εκτίμηση είναι αμερόληπτη, γ) υπάρχει στασιμότητα δευτέρου βαθμού και ισοτροπία (η ιδιότητα της μέσης τιμής και της διασποράς να μην μεταβάλλονται χωρικά και η συσχέτιση μεταξύ δύο παρατηρήσεων να εξαρτάται μόνο από την σχετική τους απόσταση).
- **Neighbourhood Kriging.** Αν και η τοπική μέση τιμή και η διασπορά είναι σταθερές σε όλη την περιοχή (υποθέσεις στασιμότητας και ισοτροπίας), στις περισσότερες εφαρμογές τα δεδομένα περιέχουν τοπικές διακυμάνσεις. Για το λόγο αυτό στην εκτίμηση της άγνωστης τιμής συμμετέχουν τα κοντινότερα σημεία ή αυτά που περιλαμβάνονται στη γύρω περιοχή.

- **Block Kriging.** Αντιμετωπίζει την ολοκλήρωση των εκτιμημένων τιμών σε μεγαλύτερες περιοχές.
- **Universal Kriging.** Εφαρμόζεται στην περίπτωση που τα δεδομένα περιέχουν τάση.
- **Disjunctive Kriging.** Υπολογίζει για κάθε εκτίμηση και την πιθανότητα η αληθινή τιμή να υπερβαίνει ένα συγκεκριμένο κατώφλι.
- **Cokriging.** Η εκτίμηση της άγνωστης τιμής βελτιώνεται σημαντικά όταν η μεταβλητή που εξετάζεται συνδέεται με κάποια άλλη μεταβλητή για την οποία υπάρχουν μετρήσεις.
- **Space-time Kriging.** Σχετίζεται με την εισαγωγή της χρονικής διάστασης των δεδομένων.

Τελευταίες έρευνες (Goonaerts, 2000), προσπαθούν να ενσωματώσουν στις διάφορες παραλλαγές της μεθόδου τον παράγοντα του υψόμετρου, μέσω γραμμικών σχέσεων, χρησιμοποιώντας υπερετίσιες και μηνιαίες τιμές βροχόπτωσης.

Η μέθοδος Kriging ίσως είναι και η πιο αξιόπιστη (Dingman, 1994, σ. 121), αλλά και αρκετά πολύπλοκη στην εφαρμογή της. Μια αναλυτική παρουσίαση των διαφόρων μορφών της μεθόδου παρουσιάζεται στον Davis, 1986, σ. 383 – 405.

#### Υψομετρική μέθοδος (Dingman, 1994)

Σαν σύλληψη η υψομετρική μέθοδος είναι μια προσδιοριστική μέθοδος εξομάλυνσης και προσαρμογής επιφάνειας. Παρόλα αυτά, διαφέρει από τις άλλες μεθόδους στο ότι η επιφανειακή μέση βροχόπτωση δεν υπολογίζεται από τις ισοϋέτιες καμπύλες [εξισ. (1.8) και (1.9)]. Η μέθοδος είναι κατάλληλη μόνο σε περιοχές που οι ορογραφικές επιδράσεις είναι σημαντικές, και άρα η βροχόπτωση για την χρονική περίοδο που μας ενδιαφέρει εξαρτάται άμεσα από το υψόμετρο. Η γνώση της τοπογραφίας της περιοχής είναι απαραίτητη για την εφαρμογή της μεθόδου.

Το πρώτο βήμα για να εφαρμοστεί η μέθοδος είναι να δημιουργηθεί η λεγόμενη *ορογραφική εξίσωση*, δηλαδή μια σχέση που να συνδέει την βροχόπτωση ( $\hat{p}$ ) με το υψόμετρο ( $z$ ). Η εξίσωση αυτή μπορεί να δημιουργηθεί από τους ερευνητές, είτε με το χέρι, κάνοντας χρήση της εμπειρίας τους, είτε με την χρήση στατιστικών μεθόδων. Συνήθως έχει την μορφή απλής γραμμικής σχέσης:

$$\hat{p}(z) = a + bz \quad (1.14)$$

Σε μερικές περιπτώσεις μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μια ορογραφικές εξισώσεις για μια περιοχή, όπως όταν έχουμε την προσήνεμη και την απάνεμη πλευρά ενός βουνού. Σ' αυτή την περίπτωση επειδή στην προσήνεμη πλευρά θα έχουμε πιο γρήγορη αύξηση της βροχόπτωσης με την αύξηση του ύψους, πρέπει να εξετάσουμε χωριστά κάθε περιοχή.

Στη συνέχεια αφού έχει δημιουργηθεί η υψομετρική καμπύλη της περιοχής η επιφανειακή βροχόπτωση υπολογίζεται ακολουθώντας τα παρακάτω βήματα:

1. Επιλέγουμε ένα διάστημα  $\Delta z$  του υψομέτρου και χωρίζουμε το συνολικό υψόμετρο σε  $H$  διαστήματα του  $\Delta z$ .
2. Από την υψομετρική καμπύλη, καθορίζουμε το κλάσμα της συνολικής περιοχής που βρίσκεται μέσα σε κάθε υποδιαίρεση του υψομέτρου. Ονομάζουμε αυτά τα κλάσματα  $\alpha_h$  όπου  $h = 1, 2, \dots, H$ .
3. Χρησιμοποιώντας την ορογραφική εξίσωση για να εκτιμήσουμε την βροχόπτωση,  $\hat{p}(z_h)$ , όπου  $z_h$  είναι το μέσο υψόμετρο σε κάθε διάστημα.
4. Υπολογίζουμε την εκτίμηση της επιφανειακής μέσης βροχόπτωσης από την σχέση:

$$\hat{P} = \sum_{h=1}^H \hat{p}(z_h) \alpha_h \quad (1.15)$$

### 1.3 Ακολουθούμενη προσέγγιση

Η μεθοδολογία που θα παρουσιαστεί παρακάτω, έχει σαν βάση ένα μοντέλο τεθλασμένα γραμμικής παλινδρόμησης (piecewise linear regression), με γνωστή ισαποχή των σημείων του, στο οποίο ενσωματώνονται δύο τεθλασμένες γραμμές με στόχο να ληφθεί υπόψη η επίδραση του υψομέτρου. Με την εισαγωγή παραμέτρων εξομάλυνσης με ρυθμιζόμενη βαρύτητα εξασφαλίζεται η ομαλότητα των αποτελεσμάτων, καθώς και η ευελιξία της μεθόδου.

### 1.4 Διάρθρωση της εργασίας

Η εργασία αποτελείται από το Κεφάλαιο 1 (Εισαγωγή-Βιβλιογραφική Επισκόπηση), τέσσερα Κεφάλαια (2-5), τη Βιβλιογραφία και δύο Παραρτήματα.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζεται η μέθοδος εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή, η οποία αποτέλεσε και την αρχική μορφή της μεθόδου.



Στο Κεφάλαιο 3 γίνεται λεπτομερής ανάλυση της επέκτασης της μεθόδου εξομάλυνσης και παρουσιάζεται η ενσωμάτωση της επιρροής μιας δεύτερης παραμέτρου στον υπολογισμό του τελικού αποτελέσματος, που για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας ήταν το υψόμετρο. Επίσης περιέχονται και δύο εφαρμογές, μία θεωρητική και μία πραγματική, όπως και η σύγκριση με την απλή μέθοδο εξομάλυνσης.

Στο Κεφάλαιο 4 γίνεται λεπτομερής ανάλυση της προσαρμογής της μεθόδου εξομάλυνσης με δύο τεθλασμένες γραμμές στις δύο διαστάσεις. Επίσης γίνεται αναφορά στην υλοποίησή της σε υπολογιστικό περιβάλλον. Τέλος, παρουσιάζεται η εφαρμογή της μεθόδου στην παραγωγή του βροχομετρικού χάρτη της Στερεάς Ελλάδας όπως και η σύγκριση των αποτελεσμάτων με αυτά της ευρέως διαδεδομένης μεθόδου της αντίστροφης απόστασης.

Το Κεφάλαιο 5 περιλαμβάνει τη σύνοψη των κύριων σημείων της εργασίας, τα συμπεράσματα καθώς και τα θέματα που μπορούσαν να αποτελέσουν αντικείμενο μελλοντικής έρευνας.

Στο Παράρτημα 1 παρουσιάζεται ο κώδικας που δημιουργήθηκε για την υλοποίηση της μεθόδου στη μία διάσταση.

Το Παράρτημα 2 περιέχει όλα τα μετεωρολογικά και γεωγραφικά στοιχεία που χρησιμοποιήθηκαν για την παραγωγή του βροχομετρικού χάρτη της Στερεάς Ελλάδας.

## ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΜΕ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗ ΓΡΑΜΜΗ

Η μέθοδος της εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή είναι μια πολύ πρόσφατη μέθοδος παρεμβολής ή /και εξομάλυνσης που έχει εισαχθεί από τον Koutsoyiannis (2000). Στο παρόν κεφάλαιο συνοψίζουμε τις βασικές αρχές αυτής της μεθόδου βασισμένοι στην ανωτέρω δημοσίευση, ενώ στα επόμενα κεφάλαια επεκτείνουμε αυτή τη μέθοδο ώστε να μπορεί να λάβει υπόψη και ένα επιπλέον παράγοντα μεταβλητότητας (εν προκειμένω το υψόμετρο), καθώς και να μπορεί να περιγράψει τη μεταβλητότητα σε δύο διαστάσεις.

### 2.1 Γενικά

Η προσαρμογή μιας καμπύλης σε ένα σύνολο από μετρήσεις  $(x_i, y_i)$ , είναι ένα από τα πιο συνηθισμένα προβλήματα στις επιστήμες που ασχολούνται με το περιβάλλον, όπως και σε άλλα επιστημονικά πεδία που εμπεριέχεται η ανάλυση δεδομένων.

Μια προσαρμοσμένη καμπύλη είναι μια μαθηματική έκφραση της εξάρτησης της μεταβλητής  $y$  από την μεταβλητή  $x$ , και χρησιμοποιείται σε πολλές περιπτώσεις, όπως παρεμβολή μεταξύ μετρήσεων, πρόβλεψη, συμπλήρωση τιμών που λείπουν σε χρονοσειρές, εκτίμηση και αφαίρεση σφαλμάτων μέτρησης, κ.λ.π.. Στην περίπτωση που η μαθηματική έκφραση της σχέσης της μεταβλητής  $y$  με την μεταβλητή  $x$ , είναι γνωστού τύπου (π.χ. γραμμική, λογαριθμική, εκθετική, πολυωνυμική, κ.λ.π.), τότε το πρόβλημα της προσαρμογής της καμπύλης απλοποιείται καθώς η μοναδική απαίτηση είναι ο καθορισμός των παραμέτρων της συγκεκριμένης έκφρασης, πράγμα που συνήθως επιτυγχάνεται με χρήση μεθόδων παλινδρόμησης ή ελαχίστων τετραγώνων. Η δυσκολία προκύπτει όταν δεν είναι γνωστή μια τέτοια σχέση και δεν μπορεί να προσεγγιστεί από καμία γνωστή συνάρτηση.

Συνήθως, σε αυτή την περίπτωση χρησιμοποιούνται γραφικές τεχνικές, όπως η χάραξη μιας καμπύλης 'με το μάτι' σε μια γραφική παράσταση των σημείων  $(x_i, y_i)$ . Προφανώς, αυτή είναι μια μη παραμετρική προσέγγιση, με την έννοια ότι δεν χρησιμοποιούνται παράμετροι κάποιου κανόνα (σε αντίθεση με τις τεχνικές

παραμετρικής παρεμβολής) που έχει τα μειονεκτήματα της υποκειμενικότητας και της έλλειψης μαθηματικής έκφρασης, με αποτέλεσμα να μην μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε αλγόριθμο.

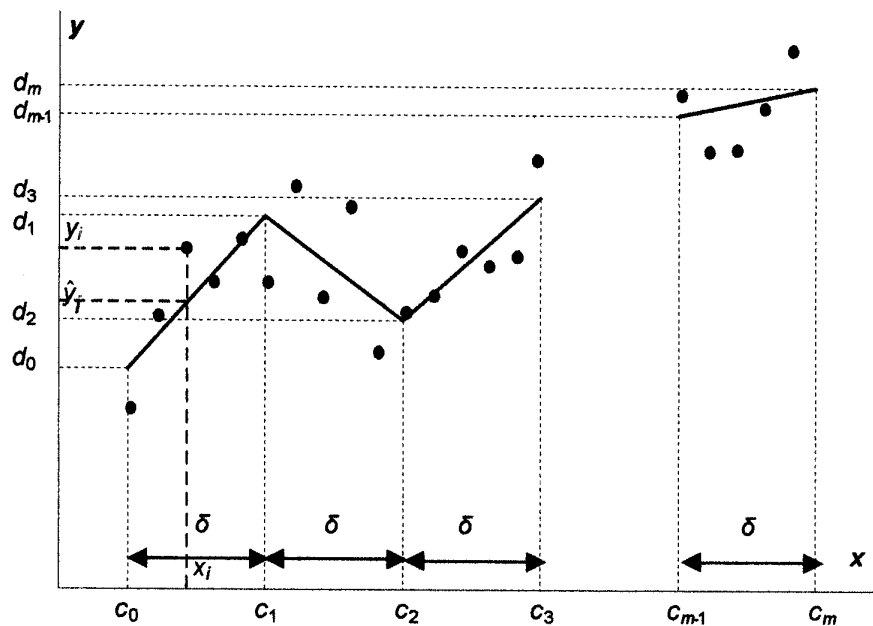
Μια σύγχρονη εναλλακτική λύση είναι η χρήση τεχνικών εξομάλυνσης στις οποίες η προσαρμοσμένη τιμή του  $y$  για κάθε τιμή του  $x$  καθορίζεται από τα διαθέσιμα δεδομένα σημεία  $(x_i, y_i)$  χρησιμοποιώντας βάρη για το καθένα έτσι ώστε το βάρος για το ζεύγος  $(x_i, y_i)$  είναι μεγάλο αν το  $x$  είναι κοντά στο  $x_i$  και μικρό στην αντίθετη περίπτωση.

Η μέθοδος της εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή που παρουσιάζεται στην συνέχεια μπορεί να θεωρηθεί σαν εναλλακτική των μεθόδων αριθμητικής εξομάλυνσης και παρεμβολής, που όμως προσεγγίζει την κλασική γραφική μέθοδο. Η μέθοδος αυτή σχετίζεται με την γραμμική παλινδρόμηση και με την μέθοδο προσαρμογής splines. Ζητούμενο είναι το να προσεγγίσουμε μια ομαλή καμπύλη η οποία μπορεί να χαραχθεί για τα σημεία  $(x_i, y_i)$  με μια τεθλασμένη γραμμή (ή ένα ανοικτό πολύγωνο) η οποία μπορεί να εκτιμηθεί αριθμητικά με μια διαδικασία ελαχίστων τετραγώνων. Οι τετμημένες των κορυφών της τεθλασμένης γραμμής δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτουν με αυτές των  $x_i$  αλλά μπορούν να σχηματίσουν μια σειρά σημείων με κάποια επιλεγμένη, χαμηλή ή υψηλή, ανάλυση. Αν και η τεθλασμένη γραμμή είναι μια ακολουθία ευθύγραμμων τμημάτων, και επομένως δεν είναι ομαλή με την αυστηρή έννοια του όρου, μπορεί να λάβει ένα μέτρο εξομάλυνσης (ή αντιθέτως τραχύτητας) με βάση τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των διαδοχικών τμημάτων της. Έτσι η εξομάλυνση είναι υψηλή (και η τραχύτητα χαμηλή) αν οι γωνίες πλησιάζουν τα  $\pi$  ακτίνια.

Αν ο μόνος στόχος χρήσης της τεθλασμένης γραμμής είναι η ελαχιστοποίηση του συνολικού τετραγωνικού σφάλματος, τότε το αποτέλεσμα μπορεί να είναι μια τεθλασμένη γραμμή με ισχυρή τραχύτητα, ανάλογα με την κατανομή των σημείων  $(x_i, y_i)$ . Παρόλα αυτά η τραχύτητα της τεθλασμένης γραμμής μπορεί να ελεγχθεί με εισάγοντας την ελαχιστοποίηση της τραχύτητας σαν ένα δεύτερο στόχο. Υπάρχει μια αλληλεξάρτηση μεταξύ των δύο αυτών στόχων. Όσο μεγαλύτερο είναι το σχετικό βάρος του δεύτερου στόχου, τόσο πιο ομαλή θα προκύψει η τεθλασμένη γραμμή. Καθώς το σχετικό βάρος αυτό τείνει στο άπειρο, η τεθλασμένη γραμμή θα τείνει στην ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων.

## 2.2 Μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου

Έστω  $(x_i, y_i)$  ένα σύνολο  $n$  σημείων στο  $x y$  επίπεδο για  $i = 1, \dots, n$ . Έστω  $c_j, j = 0, \dots, m, m+1$  σημεία στον άξονα των  $x$  έτσι ώστε το διάστημα  $[c_0, c_m]$  να περιέχει όλα τα σημεία  $x_i$ . Χάριν απλότητας υποθέτουμε ότι τα σημεία ισαπέχουν, δηλαδή  $c_j - c_{j-1} = \delta$ . Θέλουμε να βρούμε τις  $m+1$  τιμές  $d_j$  στον άξονα των  $y$ , έτσι ώστε η τεθλασμένη γραμμή που ορίζεται από τα  $m+1$  σημεία  $(c_j, d_j)$  να 'ταιριάζει' στο σύνολο των σημείων  $(x_i, y_i)$  (βλέπε Σχήμα 2-1).



Σχήμα 2-1: Διάγραμμα ορισμών

Αυτή η προσαρμογή γίνεται ελαχιστοποιώντας το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ των αρχικών σημείων  $(x_i, y_i)$  και των σημείων της τεθλασμένης γραμμής  $(c_j, d_j)$ , δηλαδή:

$$p = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (2.1)$$

όπου  $\hat{y}_i$  είναι η εκτίμηση του  $y_i$  που προκύπτει από την τεθλασμένη γραμμή για το γνωστό  $x_i$ . Αν το  $x_i$  βρίσκεται στο υποδιάστημα  $[c_{j-1}, c_j]$  για ορισμένα  $j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) τότε προφανώς η εκτίμηση  $\hat{y}_i$  θα δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{y}_i = d_j \frac{x_i - c_{j-1}}{c_j - c_{j-1}} + d_{j-1} \frac{c_j - x_i}{c_j - c_{j-1}} = \frac{1}{\delta} [d_j(x_i - c_{j-1}) + d_{j-1}(c_j - x_i)] \quad (2.2)$$

Οι παραπάνω εξισώσεις συνοπτικά μπορούν να γραφούν με την μορφή:

$$p = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 \quad (2.3)$$

με

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{\Pi} \mathbf{d} \quad (2.4)$$

όπου  $\mathbf{y} = [y_0, \dots, y_n]^T$  είναι το διάνυσμα των γνωστών τεταγμένων των δεδομένων σημείων, με μέγεθος  $n$  (ο εκθέτης  $T$  εκφράζει τον ανάστροφο πίνακα ή διάνυσμα),  $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_n]^T$  είναι το διάνυσμα των εκτιμήσεων με μέγεθος  $n$ ,  $\mathbf{d} = [d_0, \dots, d_m]^T$  είναι το διάνυσμα των αγνώστων τεταγμένων με μέγεθος  $m+1$ , και  $\mathbf{\Pi}$  είναι ένα μητρώο με μέγεθος  $n \times (m+1)$  και με τα στοιχεία του να είναι:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{x_i - c_{j-2}}{\delta}, & c_{j-2} < x_i \leq c_{j-1} \\ \frac{c_j - x_i}{\delta}, & c_{j-1} < x_i \leq c_j \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.5)$$

Αν  $m=1$ , η τεθλασμένη γραμμή γίνεται μια ευθεία και το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης του  $p$  στην εξίσωση (2.1) απλοποιείται σε προσαρμογή μιας ευθείας ελαχίστων τετραγώνων. Το πρόβλημα γίνεται ενδιαφέρον όταν  $m>1$ . Αν ο αριθμός,  $m$ , των τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής είναι αρκετά μικρότερος από τον αριθμό των δεδομένων σημείων  $n$ , τότε η ελαχιστοποίηση της εξίσωσης (2.1) θα οδηγήσει στην καλύτερα προσαρμοσμένη τεθλασμένη γραμμή, η οποία συνοψίζει τα  $n$  σημεία  $(x_i, y_i)$  χρησιμοποιώντας τα  $m+1$  σημεία  $(c_j, d_j)$ . Επίσης, αν το  $m$  είναι σημαντικά μεγαλύτερο από το  $n$  τότε η τεθλασμένη γραμμή επεκτείνει τα διαθέσιμα στοιχεία, παρέχοντας έτσι ένα τρόπο για λεπτομερή παρεμβολή μεταξύ των σημείων της. Παρόλα αυτά, στην τελευταία περίπτωση, η εξίσωση (2.1) δεν είναι ικανή για να καθορίσει ένα μοναδικό σύνολο τιμών  $d_j$  καθώς πολλοί συνδυασμοί των  $d_j$  μπορούν να οδηγήσουν σε μηδενισμό του  $p$ .

Έτσι, προσθέτουμε ακόμη έναν περιορισμό στοχεύοντας στην αποφυγή μιας πολύ τραχιάς τεθλασμένης γραμμής, καθώς και στην εξασφάλιση μοναδικής λύσης στο πρόβλημα της προσαρμογής. Για να αποκτήσουμε ένα μέτρο της τραχύτητας της

τεθλασμένης γραμμής παρατηρούμε ότι η διαφορά των κλίσεων μεταξύ δύο διαδοχικών τμημάτων της, δεδομένου ότι τα  $c_j$  ισαπέχουν, θα είναι:

$$\frac{1}{\delta} (2d_j - d_{j-1} - d_{j+1}) \quad (2.6)$$

άρα η επόμενη έκφραση μπορεί να αποτελέσει ένα κατάλληλο μέτρο για να εκφράσουμε την τραχύτητα ολόκληρης της τεθλασμένης γραμμής:

$$q = \sum_{j=1}^{m-1} (2d_j - d_{j-1} - d_{j+1})^2 \quad (2.7)$$

η οποία μπορεί να γραφεί σε μορφή μητρώων ως εξής:

$$q = \mathbf{d}^T \Psi^T \Psi \mathbf{d} \quad (2.8)$$

όπου  $\Psi$  είναι μητρώο με διαστάσεις  $(m-1) \times (m+1)$  και με τα στοιχεία του να είναι:

$$\psi_{ij} = \begin{cases} 2, & j=i+1 \\ -1, & |j-i-1|=1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.9)$$

Προφανώς,  $\Psi^T \Psi = \mathbf{0}$  για την ειδική περίπτωση που  $m=1$ .

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.3) και (2.8) και εισάγοντας έναν αδιάστατο πολλαπλασιαστή  $\lambda \geq 0$  για το  $q$ , παίρνουμε την γενικευμένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί:

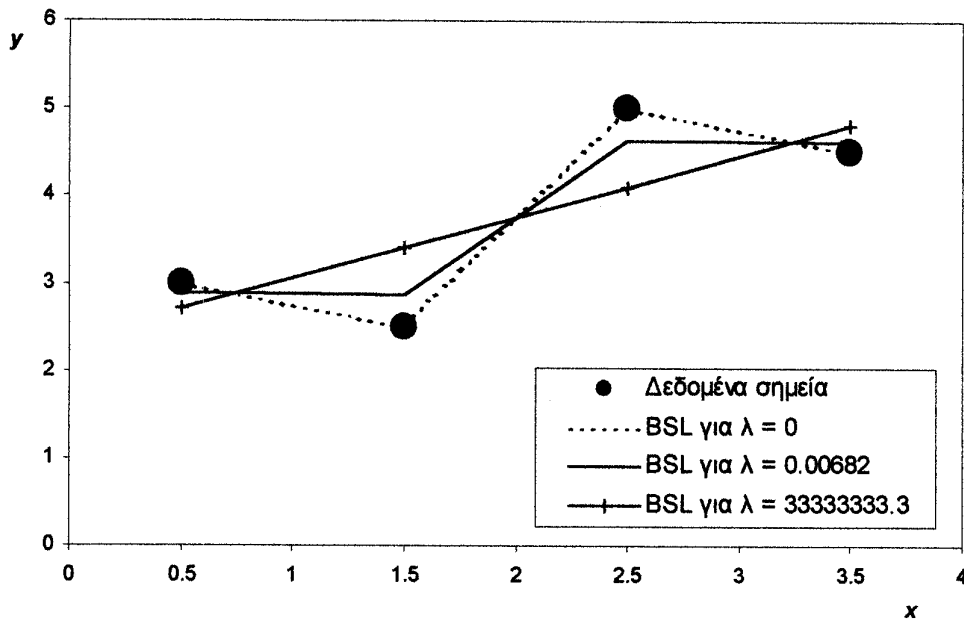
$$f(\mathbf{d}) := p + \lambda q = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 + \lambda \mathbf{d}^T \Psi^T \Psi \mathbf{d} \quad (2.10)$$

Ο πολλαπλασιαστής  $\lambda$  ελέγχει την τραχύτητα της τεθλασμένης γραμμής. Όντως, αν  $\lambda=0$  τότε η εξίσωση (2.10) θα οδηγήσει στην τεθλασμένη γραμμή με το ελάχιστο δυνατό σφάλμα  $p_{\min}$ . Αν  $\lambda>0$ , τότε η τεθλασμένη γραμμή θα είναι πιο ομαλή, εξαιτίας του όρου  $\lambda q$  της αντικειμενικής συνάρτησης και προφανώς το τετραγωνικό σφάλμα  $p$  θα είναι μεγαλύτερο από ότι το  $p_{\min}$ . Καθώς  $\lambda \rightarrow \infty$ , η τεθλασμένη γραμμή θα τείνει στην ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων ανεξάρτητα από τον αριθμό των τμημάτων  $m$ , σαν να είναι  $m=1$  (βλέπε Σχήμα 2-2). Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε το μέγιστο τετραγωνικό σφάλμα  $p$ . Λεπτομέρειες για την εκλογή κατάλληλης τιμής για την παράμετρο  $\lambda$  θα παρουσιαστούν παρακάτω.

Η εξίσωση (2.10) μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$f(\mathbf{d}) := (\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{d})^T (\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{d}) + \lambda \mathbf{d}^T \Psi^T \Psi \mathbf{d} \quad (2.11)$$





Σχήμα 2-2: Προσαρμοσμένες τεθλασμένες γραμμές (BSL) σε τέσσερα δεδομένα σημεία, για διάφορες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$  και αριθμό τμημάτων  $m=3$

Το διάνυσμα  $\mathbf{d}$  που ελαχιστοποιεί την  $f(\mathbf{d})$  ικανοποιεί την συνθήκη:

$$\frac{df}{d\mathbf{d}} = 2\mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + 2\lambda \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} - 2\mathbf{y}^T \mathbf{\Pi} = \mathbf{0} \quad (2.12)$$

Για να παραχθεί η εξίσωση (2.12) από την εξίσωση (2.11) εφαρμόσαμε τους τυπικούς κανόνες παραγωγίσις μητρώων (Marlow, 1993, σελ. 214). Η λύση της εξίσωσης (2.12) για το  $\mathbf{d}$  είναι:

$$\mathbf{d} = (\mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + \lambda \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi})^{-1} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{y} \quad (2.13)$$

Παρατηρούμε ότι τα μητρώα  $\mathbf{B} := \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi}$  και  $\mathbf{C} := \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi}$  είναι τετραγωνικά με μέγεθος  $(m+1) \times (m+1)$  με το πρώτο να είναι τριδιαγώνιο, ενώ το δεύτερο να είναι πενταζωνικό. Το  $\mathbf{B}$  μπορεί να είναι ανώμαλο, δηλαδή μη αντιστρέψιμο, αν μία ή περισσότερες από τις στήλες του  $\mathbf{\Pi}$  έχουν μηδενικά στοιχεία. Αυτό συμβαίνει όταν σε δύο τουλάχιστον συνεχόμενα διαστήματα  $[c_{j-1}, c_j]$  δεν περιέχουν κανένα  $x_i$ . Το μητρώο  $\mathbf{C}$  είναι πάντα ανώμαλο. Παρόλα αυτά το άθροισμα  $\mathbf{B} + \lambda\mathbf{C}$  είναι ομαλό και έτσι υπάρχει το αντίστροφό του.

### 2.3 Επιλογή των παραμέτρων της μεθόδου

Είναι προφανές ότι το μοντέλο έχει δύο παραμέτρους που μπορούν να ρυθμιστούν:

1. Τον αριθμό των διαστημάτων  $m$  και
2. Την παράμετρο εξομάλυνσης, δηλαδή τον αριθμό  $\lambda$ .

Αν το  $m$  είναι μικρό τότε και εκείνο δρα σαν παράγοντας εξομάλυνσης.

Η επιλογή των παραμέτρων μπορεί να γίνει εκτιμώντας το μέγεθος της εξομάλυνσης είτε γραφικά, ή με την χρήση πιο αντικειμενικών μεθόδων.

Στην πρώτη περίπτωση, ο μελετητής χρησιμοποιεί τη εμπειρία του πάνω στο συγκεκριμένο πρόβλημα, κάνοντας δοκιμές με διαφορετικές τιμές των  $m$  και  $\lambda$  και αξιολογώντας τα αποτελέσματα με γραφικό τρόπο. Για μια πιο εύκολη επιλογή του  $\lambda$  προτείνεται ένας μετασχηματισμός σε έναν άλλο αριθμό  $\tau$ , του οποίου οι τιμές θα περιορίζονται στο διάστημα  $[0, 1]$ . Αυτός ο μετασχηματισμός προέκυψε μετά από αριθμητική διερεύνηση της μεθόδου σε αρκετές εφαρμογές και έχει την μορφή:

$$\lambda = \left( 10 m \frac{\ln \tau_m}{\ln \tau} \right)^k \quad (2.14)$$

όπου  $\tau_m = 0.99$  είναι η μέγιστη επιτρεπτή τιμή που μπορεί να πάρει το  $\tau$ , που αντιστοιχεί σε ένα άνω όριο του  $\lambda$ , το οποίο για αριθμητική σταθερότητα είναι ίσο με:

$$\lambda_m = \frac{\text{trace}(\mathbf{B})}{\text{trace}(\mathbf{C})} 10^8 \quad (2.15)$$

Η σταθερά  $k$  στην εξίσωση (2.14) καθορίζεται από την σχέση:

$$k = \frac{\ln \lambda_m}{\ln(10m)} \quad (2.16)$$

η οποία προκύπτει από τις εξισώσεις (2.14) και (2.15). Η μικρότερη επιτρεπόμενη τιμή του  $\lambda$  είναι το μηδέν, αν υπάρχει ο αντίστροφος του μητρώου  $\mathbf{B}$ . Διαφορετικά μπορεί αν εκτιμηθεί από την εξίσωση (2.14) χρησιμοποιώντας μια μικρή τιμή του  $\tau = 1 - \tau_m = 0.01$ .

Στη δεύτερη περίπτωση, η εκλογή των παραμέτρων γίνεται με πιο αντικειμενικό τρόπο, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (2.4) και (2.13) οι οποίες μας δίνουν:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{A} \mathbf{y} \quad (2.17)$$

όπου  $\mathbf{A}$  είναι ένα  $n \times n$  συμμετρικό μητρώο που δίνεται από τη σχέση:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Pi}(\mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + \lambda \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi})^{-1} \mathbf{\Pi}^T \quad (2.18)$$

και εξαρτάται από τις δύο ρυθμιζόμενες παραμέτρους  $m$  και  $\lambda$  (ή  $\tau$ ). Σ' αυτή την περίπτωση, η εκτίμηση των παραμέτρων μπορεί να γίνει ελαχιστοποιώντας την λεγόμενη generalized cross – validation (GCV; Craven and Wahba, 1979), που ορίζεται ως εξής:

$$V = \frac{\frac{1}{n} \|(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{y}\|^2}{\left[ \frac{1}{n} \text{trace}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) \right]^2} \quad (2.19)$$

Για δεδομένο αριθμό τμημάτων  $m$  η ελαχιστοποίηση του  $V$  οδηγεί στη βέλτιστη τιμή της παραμέτρου  $\tau$ . Αυτό μπορεί να επαναληφθεί για αρκετές τιμές του  $m$  μέχρι να επιτευχθεί το ολικό ελάχιστο. Παρόλα αυτά, συνήθως το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, δηλαδή ο αριθμητής στην εξίσωση (2.19) καθώς και η τιμή της GCV, μειώνεται με την αύξηση της παραμέτρου  $m$ .

Εφαρμογές της μεθόδου της εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή παρουσιάζονται από τον Koutsoyiannis (2000).

#### 2.4 Σχέση της μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή με άλλες παρόμοιες μεθόδους

Η μέθοδος εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή, με το μαθηματικό υπόβαθρο που περιγράφηκε στις προηγούμενες ενότητες, σχετίζεται με άλλες μεθόδους προσαρμογής καμπυλών και ειδικά με τις μεθόδους τεθλασμένα γραμμικής παλινδρόμησης και κυβικών splines εξομάλυνσης (cubic smoothing splines).

Η κύρια διαφορά της μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή από τις μεθόδους τεθλασμένα γραμμικής παλινδρόμησης, με γνωστή ισαποχή των σημείων τους (Ertel and Fowlkes, 1976), είναι ο παράγοντας εξομάλυνσης  $\mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi}$ . Σαν άμεση συνέπεια, το μητρώο των συντελεστών των γραμμικών εξισώσεων που στην τεθλασμένα γραμμική παλινδρόμηση είναι τριδιαγώνιο, στην εξίσωση (2.13) γίνεται πενταζωνικό.

Στην περίπτωση των κυβικών splines εξομάλυνσης, υπάρχουν αρκετές ομοιότητες με την μέθοδο εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή (Reinsch, 1967, 1971; Wahba, 1990). Και οι δύο μέθοδοι καταλήγουν στην ίδια περίπου τελική εξίσωση (2.13) και έχουν τις ίδιες υπολογιστικές απαιτήσεις, καθώς και οι δύο εμπεριέχουν τη

λύση πενταζωνικών γραμμικών συστημάτων. Προφανώς όμως, τα στοιχεία των μητρώων που εμπλέκονται ορίζονται με τελείως διαφορετικό τρόπο, λόγω των διαφορετικών υποθέσεων των δύο μεθόδων. Ειδικότερα, η καμπυλότητα της μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή ορίζεται με βάση τις γωνίες που σχηματίζονται από τα διαδοχικά τμήματα της γραμμής, ενώ αντίθετα στην μέθοδο splines υπολογίζεται από την δεύτερη παράγωγο της spline. Γενικά, η γραμμική φύση των τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής αποδίδουν στην μέθοδο απλότητα και την κάνουν περισσότερο φειδωλή σε σχέση με τον αριθμό των παραμέτρων που καθορίζουν κάθε τμήμα της.

Μια αξιοσημείωτη ιδιότητα της μεθόδου είναι το γεγονός ότι η ανάλυση, δηλαδή το μήκος των διαδοχικών τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής  $\delta$ , δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με τον αριθμό των δεδομένων σημείων, αλλά μπορεί να επιλεγεί αραιότερη ή πυκνότερη ανάλογα με τις απαιτήσεις που παρουσιάζει το πρόβλημα που εξετάζεται. Η δυνατότητα επιλογής του αριθμού των τμημάτων μπορεί σε μερικές περιπτώσεις να αποτελεί πλεονέκτημα, όπως για παράδειγμα όταν τα δεδομένα σημεία είναι πάρα πολλά ή δεν είναι αρκετά ομαλά κατανεμημένα.

## ΕΠΕΚΤΑΣΗ ΤΗΣ ΜΕΘΟΔΟΥ ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΙΠΛΗΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΓΡΑΜΜΗΣ

### 3.1 Γενικά

Όπως προαναφέρθηκε, η βροχόπτωση σε υπερετήσια κλίμακα επηρεάζεται εμφανώς από την επίδραση της γειννίας με την θάλασσα και της ορογραφίας. Στις προηγούμενες μεθόδους, η επίδραση του υψομέτρου στο ύψος βροχής, αν και δεν έχει ρητώς θεωρηθεί, έχει ληφθεί υπόψη με έμμεσο τρόπο μέσω των υψομέτρων των σταθμών, με την προϋπόθεση ότι η υψομετρική κατανομή των σταθμών είναι αντιπροσωπευτική, οπότε και το μέσο υψόμετρο των σταθμών περίπου ταυτίζεται με το μέσο υψόμετρο της λεκάνης. Ωστόσο, σε πολλές περιπτώσεις η προϋπόθεση αυτή δεν ισχύει, αφού οι υδρολογικές και μετεωρολογικές υπηρεσίες προτιμούν να τοποθετούν στις πιο εύκολα προσπελάσιμες πεδινές περιοχές, αφήνοντας ακάλυπτες τις δυσπρόσιτες ορεινές περιοχές. Αυτό έχει σαν συνέπεια την υποεκτίμηση του ύψους βροχής.

Η μέθοδος εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή μπορεί με αντικειμενικό τρόπο να συμπεριλάβει και την επίδραση του υψομέτρου της περιοχής. Στην συνέχεια παρουσιάζεται η επέκταση της μεθόδου, με την εισαγωγή του παράγοντα του υψομέτρου στον υπολογισμό του ύψους βροχόπτωσης.

### 3.2 Επέκταση της μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή με την εισαγωγή του παράγοντα του υψομέτρου

Έστω  $(x_i, y_i)$  ένα σύνολο  $n$  σημείων στο  $x y$  επίπεδο για  $i = 1, \dots, n$ . Έστω  $c_j, j = 0, \dots, m, m+1$  σημεία στον άξονα των  $x$  έτσι ώστε το διάστημα  $[c_0, c_m]$  να περιέχει όλα τα σημεία  $x_i$ . Υποθέτουμε ότι τα σημεία ισαπέχουν, δηλαδή  $c_j - c_{j-1} = \delta$ . Επίσης για κάθε σημείο  $x$  είναι γνωστή και η τιμή μιας παραμέτρου  $t$ , η οποία για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας είναι το υψόμετρο. Άρα σε κάθε σημείο  $(x_i, y_i)$  αντιστοιχεί μία τιμή της παραμέτρου  $t(x_i)$ , με  $i=1, \dots, n$  και σε κάθε σημείο  $c_j$  αντιστοιχεί μία τιμή της παραμέτρου  $t(c_j)$ , με  $j=0, \dots, m$ . Αυτό το σύνολο σημείων γνωστού

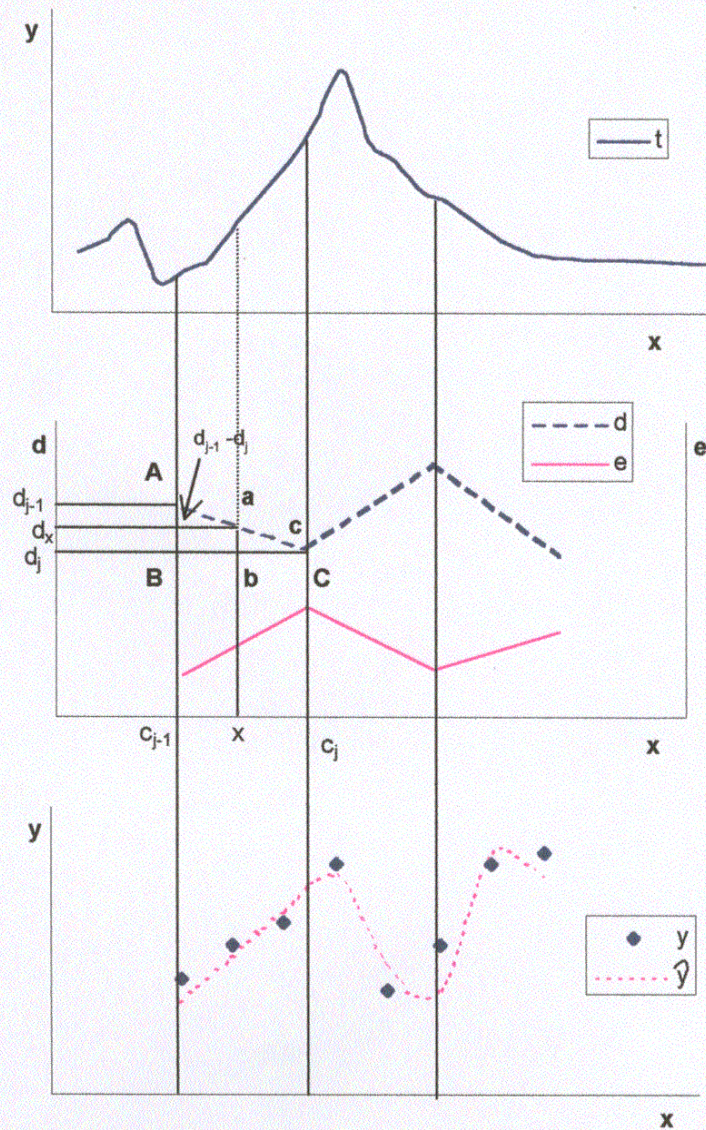


υψομέτρου στην πράξη μπορεί να μην περιλαμβάνει τις τιμές της παραμέτρου σε κάθε  $x$ , αλλά στα σημεία ενός καννάβου οσοδήποτε πυκνού μας ενδιαφέρει και είναι δυνατόν να προέρχεται από επεξεργασία γεωγραφικών πληροφοριών, αποτελώντας πληροφορία εύκολα προσβάσιμη στους μελετητές.

Κάνουμε την παραδοχή ότι η εξαρτημένη μεταβλητή  $y$  σε οποιαδήποτε θέση  $x$  μπορεί να εκφραστεί ως μία γραμμική συνάρτηση του υψομέτρου  $t$ , δηλαδή:

$$y = d + e t \quad (3.1)$$

όπου  $d$  και  $e$  συντελεστές, οι οποίοι δεν είναι σταθεροί αλλά οι τιμές τους μεταβάλλονται συναρτήσει του  $x$ .



Σχήμα 3-1: Διάγραμμα ορισμών για την μέθοδο εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη γραμμή



Η παραπάνω γραμμική σχέση μοιάζει με αυτές που έχουν χρησιμοποιηθεί στη βιβλιογραφία για την περιγραφή των υπογραφικών καμπυλών, αλλά διαφέρει στο γεγονός ότι δέχεται μεταβολή των συντελεστών της γραμμικής σχέσης. Η μεταβολή τους εκφράζεται από δύο τεθλασμένες γραμμές όπως φαίνονται στο Σχήμα 3-1.

Στις κορυφές της τεθλασμένης, η πιο πάνω σχέση παίρνει την μορφή:

$$y_j = d_j + t_j e_j \quad (3.2)$$

Ο στόχος είναι να βρούμε τις  $m+1$  τιμές  $d_j$  και  $e_j$ , στον άξονα των  $y$ , έτσι ώστε η καμπύλη που ορίζεται από τα  $m+1$  σημεία  $(c_j, d_j + t_j e_j)$ , η οποία αποτελεί συνδυασμό των δύο τεθλασμένων και της καμπύλης  $t(x)$  να 'ταιριάζει' στο σύνολο των σημείων  $(x_i, y_i)$  λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή των  $m+1$  σημείων  $t_j$  πάνω τους. Έτσι, θα υπάρχει η δυνατότητα με βάση τα  $m+1$  ζεύγη τεταγμένων  $d_j, e_j$ , να μπορούμε να υπολογίσουμε τυχαία σημεία πάνω στον άξονα των  $y$ , τα οποία θα διαφέρουν από τα  $d_j$  και  $e_j$ , καθόσον αντιστοιχούν σε τυχαία τιμή του  $x$  και του αντίστοιχού του υψομέτρου  $t$ , αρκεί αυτά να βρίσκονται μέσα στο διάστημα  $[c_0, c_m]$ .

Η αρχική προσαρμογή γίνεται ελαχιστοποιώντας το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ των αρχικών σημείων  $(x_i, y_i)$  και των σημείων της καμπύλης, δηλαδή:

$$p = \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (3.3)$$

όπου  $\hat{y}_i$  είναι η εκτίμηση του  $y_i$  που προκύπτει από την τεθλασμένη γραμμή για το γνωστό  $x_i$ . Η παραπάνω εξίσωση συνοπτικά μπορεί να γραφεί με την μορφή:

$$p = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 \quad (3.4)$$

όπου  $\mathbf{y} = [y_0, \dots, y_n]^T$  είναι το διάνυσμα των γνωστών τεταγμένων των δεδομένων σημείων, με μέγεθος  $n$  (ο εκθέτης  $T$  εκφράζει τον ανάστροφο πίνακα ή διάνυσμα) και  $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_n]^T$  είναι το διάνυσμα των εκτιμήσεων με μέγεθος  $n$ .

Η γενική συνάρτηση εκτίμησης θα είναι:

$$\hat{y}_x = d_x + t_x e_x \quad (3.5)$$

όπου τα  $d_x, e_x$  είναι οι τεταγμένες των αντίστοιχων τεθλασμένων γραμμών στο σημείο  $x = c_j$  (βλέπε Σχήμα 3-1). Η τεταγμένη της τεθλασμένης γραμμής  $d_x$ , προκύπτει από τα όμοια τρίγωνα  $ABC$  και  $abc$  του Σχήματος 3-1 ως εξής:

$$d_x = d_j + (d_{j-1} - d_j) \frac{c_j - x}{c_j - c_{j-1}} = d_x = d_j + (d_{j-1} - d_j) \frac{c_j - x}{\delta} \quad (3.6)$$

Μετά από πράξεις καταλήγουμε στην σχέση:

$$d_x = \frac{1}{\delta} [(x - c_{j-1}) d_j + (c_j - x) d_{j-1}] \quad (3.7)$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και η αντίστοιχη σχέση για την τεταγμένη της τεθλασμένης γραμμής  $e_x$ , η οποία είναι:

$$e_x = \frac{1}{\delta} [(x - c_{j-1}) e_j + (c_j - x) e_{j-1}] \quad (3.8)$$

Κατά συνέπεια, αν το τυχαίο σημείο  $x_i$ , βρίσκεται στο υποδιάστημα  $[c_{j-1}, c_j]$  για ορισμένο  $j$  ( $1 \leq j \leq m$ ) τότε προφανώς η εκτίμηση  $\hat{y}_i$  θα δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{y}_i(x_i, t(x_i)) = \frac{1}{\delta} \{ [d_j (x_i - c_{j-1}) + d_{j-1} (c_j - x_i)] + t(x_i) [e_j (x_i - c_{j-1}) + e_{j-1} (c_j - x_i)] \} \quad (3.9)$$

Η εξίσωση (3.9) είναι αντίστοιχη της εξίσωσης (2.2), για την περίπτωση που εξετάζουμε.

Εφαρμόζοντας την εξίσωση (3.9) για  $i = 1, 2, \dots, n$ , παίρνουμε τις παρακάτω σχέσεις:

$$\begin{aligned} \hat{y}_1 &= \frac{1}{\delta} \{ [d_1 (x_1 - c_0) + d_0 (c_1 - x_1)] + t(x_1) [e_1 (x_1 - c_0) + e_0 (c_1 - x_1)] \} \\ \hat{y}_2 &= \frac{1}{\delta} \{ [d_2 (x_2 - c_1) + d_1 (c_2 - x_2)] + t(x_2) [e_2 (x_2 - c_1) + e_1 (c_2 - x_2)] \} \\ &\vdots \\ \hat{y}_n &= \frac{1}{\delta} \{ [d_m (x_n - c_{m-1}) + d_{m-1} (c_m - x_n)] + t(x_n) [e_m (x_n - c_{m-1}) + e_{m-1} (c_m - x_n)] \} \end{aligned} \quad (3.10)$$

όπου χάριν παραδείγματος έχει υποτεθεί ότι το σημείο  $x_1$  βρίσκεται στο διάστημα  $[c_0, c_1]$ , το  $x_2$  στο διάστημα  $[c_1, c_2]$  και το σημείο  $x_n$  στο διάστημα  $[c_{m-1}, c_m]$

Οι εξισώσεις (3.10) μπορούν να γραφούν συνοπτικά υπό την μορφή μητρώων ως εξής:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} \quad (3.11)$$

όπου  $\hat{\mathbf{y}} = [\hat{y}_0, \dots, \hat{y}_n]^T$  είναι το διάνυσμα των εκτιμήσεων με μέγεθος  $n$ ,  $\mathbf{d} = [d_0, \dots, d_m]^T$  και  $\mathbf{e} = [e_0, \dots, e_m]^T$  είναι τα διανύσματα των αγνώστων τεταγμένων  $d_x$ ,  $e_x$  με μέγεθος  $m+1$ ,  $\mathbf{T}$  είναι ένα διαγώνιο μητρώο με μέγεθος  $n \times n$ , ήτοι:

$$\mathbf{T} = \text{diag}(t(x_1), \dots, t(x_n)) \quad (3.12)$$

και  $\mathbf{\Pi}$  είναι ένα μητρώο με μέγεθος  $n \times (m+1)$  (για  $i=1, \dots, n$  και  $j=0, \dots, m$ ), με τα στοιχεία του να ορίζονται ως εξής:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{x_i - c_{j-1}}{\delta}, & c_{j-1} < x_i \leq c_j \\ \frac{c_{j+1} - x_i}{\delta}, & c_j < x_i \leq c_{j+1} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.13)$$

Οι προαναφερθείσες ιδιότητες της τεθλασμένης γραμμής ισχύουν και σε αυτήν την περίπτωση οδηγώντας μας τελικά στην παρακάτω σχέση η οποία αποτελεί ένα κατάλληλο μέτρο για να εκφράσουμε την τραχύτητα ολόκληρης της τεθλασμένης γραμμής  $d_x$ , και έχει παρόμοια μορφή με την εξίσωση (2.8):

$$q_d = \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{d} \quad (3.14)$$

Όμως θα πρέπει να προσθέσουμε ακόμη έναν περιορισμό στο να αποκτήσουμε ένα μέτρο της τραχύτητας της τεθλασμένης γραμμής  $e$ . Παρατηρούμε ότι η διαφορά των κλίσεων μεταξύ δύο διαδοχικών τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής  $e_x$ , δεδομένου ότι τα  $c_j$  ισαπέχουν, θα είναι:

$$\frac{1}{\delta} (2e_j - e_{j-1} - e_{j+1}) \quad (3.15)$$

άρα η επόμενη έκφραση μπορεί να αποτελεί ένα κατάλληλο μέτρο για να εκφράσουμε την τραχύτητα της τεθλασμένης γραμμής  $e_x$ :

$$q_e = \sum_{j=1}^{m-1} (2e_j - e_{j-1} - e_{j+1})^2 \quad (3.16)$$

η οποία μπορεί να γραφεί σε μορφή μητρώων ως εξής:

$$q_e = \mathbf{e}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{e} \quad (3.17)$$

όπου  $\mathbf{\Psi}$  είναι μητρώο με διαστάσεις  $(m-1) \times (m+1)$  και με τα στοιχεία του να είναι:

$$\psi_{ij} = \begin{cases} 2, & j=i+1 \\ -1, & |j-i|=1 \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (3.18)$$

Προφανώς,  $\Psi^T \Psi = \mathbf{0}$  για την ειδική περίπτωση που  $m=1$ .

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις (3.4), (3.11), (3.14) και (3.17) και εισάγοντας έναν αδιάστατο πολλαπλασιαστή  $\lambda \geq 0$  για το  $q_d$  και έναν  $\mu \geq 0$  για το  $q_e$ , παίρνουμε την γενικευμένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί:

$$f(\mathbf{d}, \mathbf{e}) := p + \lambda q_d + \mu q_e = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 + \lambda \mathbf{d}^T \Psi^T \Psi \mathbf{d} + \mu \mathbf{e}^T \Psi^T \Psi \mathbf{e} \quad (3.19)$$

Οι πολλαπλασιαστές  $\lambda, \mu$  ελέγχουν την τραχύτητα των δύο τεθλασμένων γραμμών. Όντως, αν  $\lambda=0$  και  $\mu=0$ , τότε η εξίσωση (3.19) θα οδηγήσει σε μία εξίσωση παρεμβολής/ εξομάλυνσης με το ελάχιστο δυνατό σφάλμα  $p_{\min}$ . Αν  $\lambda>0$  και  $\mu>0$ , τότε η τεθλασμένη γραμμή θα είναι πιο ομαλή, εξαιτίας των όρων  $\lambda q_d$  και  $\mu q_e$  της αντικειμενικής συνάρτησης και προφανώς το τετραγωνικό σφάλμα  $p$  θα είναι μεγαλύτερο από ότι το  $p_{\min}$ . Καθώς  $\lambda \rightarrow \infty$  και  $\mu \rightarrow \infty$ , η εξίσωση παρεμβολής/ εξομάλυνσης θα τείνει στην ευθεία των ελαχίστων τετραγώνων ανεξάρτητα από τον αριθμό των τμημάτων  $m$ , σαν να είναι  $m=1$ . Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε το μέγιστο τετραγωνικό σφάλμα  $p$ .

Για να ελαχιστοποιήσουμε την εξίσωση (3.19) εφαρμόσαμε τους τυπικούς κανόνες παραγωγίσης μητρώων (Marlow, 1993, σ. 214). Η διαδικασία είναι η εξής:  
Έστω

$$f_1 = \|\mathbf{y} - \hat{\mathbf{y}}\|^2 = \|\mathbf{y} - \mathbf{\Pi} \mathbf{d} - \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e}\|^2 \quad (3.20)$$

Είναι

$$f_1 = [\mathbf{y} - \mathbf{\Pi} \mathbf{d} - \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e}]^T [\mathbf{y} - \mathbf{\Pi} \mathbf{d} - \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e}] \quad (3.21)$$

και τελικά

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbf{y}^T \mathbf{y} - \mathbf{y}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{d} - \mathbf{y}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} - \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{y} + \\ &+ \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{y} + \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (3.22)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.22) ως προς το διάνυσμα  $\mathbf{d}$ , έχουμε:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{d}} = -2\mathbf{y}^T \mathbf{\Pi} + 2\mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{\Pi} \quad (3.23)$$

ενώ παραγωγίζοντας την εξίσωση (3.22) ως προς το διάνυσμα  $\mathbf{e}$ , έχουμε:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}} = -2\mathbf{y}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + 2\mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + 2\mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \quad (3.24)$$

Αντίστοιχα, για τους όρους των πολλαπλασιαστών  $\lambda$  και  $\mu$  παραγωγίζοντάς τους παίρνουμε:

$$\frac{\partial(\lambda \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} = 2 \lambda \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \quad (3.25)$$

και

$$\frac{\partial(\mu \mathbf{e}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} = 2 \mu \mathbf{e}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \quad (3.26)$$

Τελικά, μετά από πράξεις καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \lambda \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{\Pi} &= \mathbf{y}^T \mathbf{\Pi} \\ \mu \mathbf{e}^T \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \mathbf{e} + \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} &= \mathbf{y}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \end{aligned} \quad (3.27)$$

το οποίο με αναστροφή των διανυσμάτων  $\mathbf{d}^T$  και  $\mathbf{e}^T$  δίνει την τελική μορφή του συστήματος που η λύση του θα μας δώσει τα διανύσματα  $\mathbf{d}$  και  $\mathbf{e}$  τα οποία ελαχιστοποιούν την εξίσωση (3.19):

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + \lambda \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi}] \mathbf{d} + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} &= \mathbf{\Pi}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + \mu \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi}] \mathbf{e} &= \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{y} \end{aligned} \quad (3.28)$$

Στην περίπτωση που  $\lambda = \mu = 0$ , τότε το σύστημα δεν έχει λύση γιατί οι δύο εξισώσεις συμπίπτουν.

Η λύση του συστήματος προκύπτει μετά από πράξεις και υπό την μορφή μητρώων έχει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + \lambda \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} & \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} & \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + \mu \mathbf{\Psi}^T \mathbf{\Psi} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{y} \\ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{y} \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

Εφόσον το παραπάνω σύστημα επιλυθεί, μέσω της εξίσωσης (3.11) έχουμε τις εκτιμήσεις των τεταγμένων,  $\hat{y}$ , στα σημεία  $c_j$ . Κατ' επέκταση, χρησιμοποιώντας την εξίσωση (3.9) μπορούμε να εκτιμήσουμε την τεταγμένη  $\hat{y}$  οποιουδήποτε σημείου  $x$  μέσα στο διάστημα  $[c_0, c_m]$  αρκεί να γνωρίζουμε και την τιμή της παραμέτρου  $t$  στο αντίστοιχο σημείο.



### 3.3 Ομοιότητες και διαφορές με την απλή μέθοδο εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή

Το μαθηματικό πλαίσιο που παρουσιάστηκε προηγουμένως έχει σαν ιδιότητα το να διατηρεί όλα τα χαρακτηριστικά της απλής μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή, αλλά ενσωματώνει την επιρροή ενός ακόμη παράγοντα στην παρεμβαλλόμενη τιμή και εν προκειμένω, του παράγοντα του υψομέτρου στην εκτίμηση της τιμής της βροχόπτωσης.

Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε, όπως και στην απλή περίπτωση, να προσεγγίσουμε τα σημεία  $(x_i, y_i)$  με δύο τεθλασμένες γραμμές, όπου η δεύτερη χρησιμοποιείται για να λάβει υπόψη την επιρροή του υψομέτρου. Οι τετμημένες των κορυφών των δύο τεθλασμένων δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτουν με αυτές των  $x_i$  αλλά μπορούν να σχηματίσουν μια σειράς σημείων με κάποια επιλεγμένη, χαμηλή ή υψηλή, ανάλυση. Τα μέτρα της εξομάλυνσης (ή αντιθέτως τραχύτητας) ορίζονται και πάλι με βάση τις γωνίες που σχηματίζονται μεταξύ των διαδοχικών τμημάτων καθεμιάς από τις τεθλασμένες γραμμές. Έτσι για μεγάλες τιμές του πολλαπλασιαστή  $\lambda$  ή  $\mu$  η εξομάλυνση είναι υψηλή (και η τραχύτητα χαμηλή), ενώ αντίθετα για μικρές τιμές θα έχουμε υψηλή τραχύτητα με παράλληλη μείωση του συνολικού σφάλματος της μεθόδου.

Ειδικότερα η εισαγωγή του πολλαπλασιαστή  $\mu$  μας εξασφαλίζει την εισαγωγή της επίδρασης του υψομέτρου στον καθορισμό της τραχύτητας της γραμμής. Μικρές τιμές του  $\mu$  έχουν ως αποτέλεσμα μικρή επιρροή της ορογραφίας στα αποτελέσματα της μεθόδου, ενώ αντίστοιχα μεγαλύτερες τιμές αποδίδουν έντονα τα χαρακτηριστικά της ορογραφίας της περιοχής. Το συγκεκριμένο χαρακτηριστικό δίνει στο μελετητή την δυνατότητα να επιλέξει μόνος του τα χαρακτηριστικά των αποτελεσμάτων, σύμφωνα με τις ανάγκες της περιοχής ενδιαφέροντος και την εμπειρία του.

Άμεση συνέπεια της εισαγωγής του υψομέτρου στην έκφραση της παρεμβολής είναι ο διπλασιασμός των αγνώστων της μεθόδου, μιας και θα πρέπει να υπολογίσουμε επιπλέον το διάνυσμα  $e$  εκτός του διανύσματος  $d$ , το οποίο αρκούσε στην απλή περίπτωση. Επίσης αυξήθηκαν και τα απαιτούμενα δεδομένα για την εφαρμογή της μεθόδου, μιας και πρέπει να γνωρίζουμε την παράμετρο  $t$  σε αρκετά σημεία της περιοχής ενδιαφέροντος.

### 3.4 Υλοποίηση της μεθόδου σε υπολογιστικό περιβάλλον

Η μέθοδος υλοποιήθηκε σε γλώσσα προγραμματισμού Visual Basic for Applications σαν λειτουργική μονάδα μέσα στο περιβάλλον MS-Excel για Windows και καλείται με τον κλασικό τρόπο που καλούνται οι συναρτήσεις μητρώων (array formulas). Η επιλογή αυτή δίνει την δυνατότητα στο χρήστη να εκμεταλλευτεί τις δυνατότητες του MS-Excel, όσον αφορά την γραφική απεικόνιση και επεξεργασία των αποτελεσμάτων, αλλά παρέχει και την ευελιξία της γλώσσας προγραμματισμού Visual Basic.

Ο κώδικας που αναπτύχθηκε περιλαμβάνει τις υπορουτίνες ανάγνωσης των δεδομένων, δημιουργίας των εμπλεκόμενων μητρώων, της επίλυσης του συστήματος των εξισώσεων (3.29) καθώς επίσης και την εφαρμογή της εξίσωσης (3.9). Πρέπει να αναφερθεί ότι για την επίλυση του παραπάνω συστήματος δεν χρησιμοποιήθηκε κάποιος ιδιαίτερος αλγόριθμος, αλλά η ενσωματωμένη συνάρτηση μητρώων του MS-Excel 'MINVERSE', λόγω των μικρών απαιτήσεων της μεθόδου σε υπολογιστική ισχύ.

Στο Παράρτημα 1 παρουσιάζεται ο κώδικας όπως εφαρμόζεται.

### 3.5 Εφαρμογές

Για να παρουσιάσουμε την μέθοδο επιλέξαμε δύο εφαρμογές: η πρώτη αφορά μια συνθετική συνάρτηση διερεύνησης, ενώ η δεύτερη ένα πραγματικό πρόβλημα.

#### 3.5.3 Εφαρμογή διερεύνησης

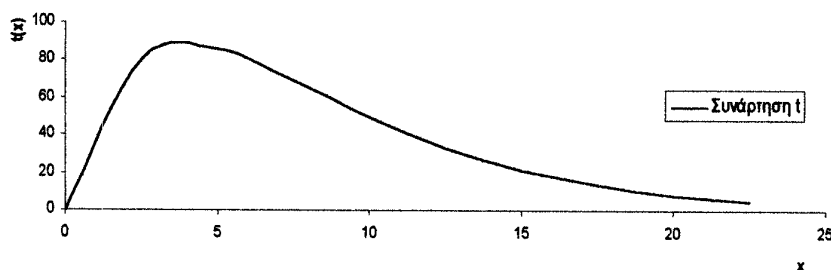
Σε αυτή την εφαρμογή συνθέσαμε 10 σημεία από την μάλλον πολύπλοκη γεννήτρια συνάρτηση:

$$y = g(x) = \left(1 + 10 e^{-0.01x - 0.1\sqrt{Tx}}\right) - 0.57 \quad (3.30)$$

όπως επίσης θεωρήσαμε ότι οι τιμές της συνάρτησης  $t$ , η οποία εξαρτάται από τις τιμές των  $x$ , δίνονται από την σχέση (βλέπε Σχήμα 3-2):

$$t = z(x) = 60 x e^{-0.25x} \quad (3.31)$$

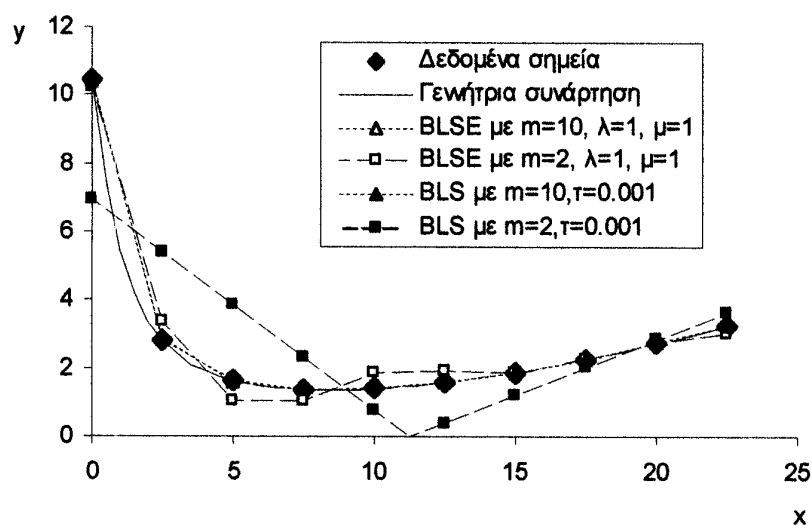
Η συνάρτηση  $y$ , όταν το  $x$  ανήκει στο διάστημα  $[0, 22.5]$ , παρουσιάζεται στο Σχήμα 3-3 μαζί με τις συναρτήσεις παρεμβολής/ εξομάλυνσης διπλής τεθλασμένης (BLSE)



Σχήμα 3-2: Η μεταβολή της συνάρτησης  $t(x)$  στο διάστημα  $[0, 22.5]$

και τις αντίστοιχες απλής τεθλασμένης (BLS), οι οποίες παρήχθησαν για διάφορες τιμές τμημάτων  $m$ , η καθεμιά.

Παρατηρούμε ότι για  $m=10$  τα αποτελέσματα της μεθόδου διπλής τεθλασμένης συμπίπτουν με τα δεδομένα σημεία, αλλά και για  $m=2$  τα αποτελέσματα είναι πολύ ικανοποιητικά παρουσιάζοντας βέβαια ανάλογο βαθμό εξομάλυνσης. Το γεγονός



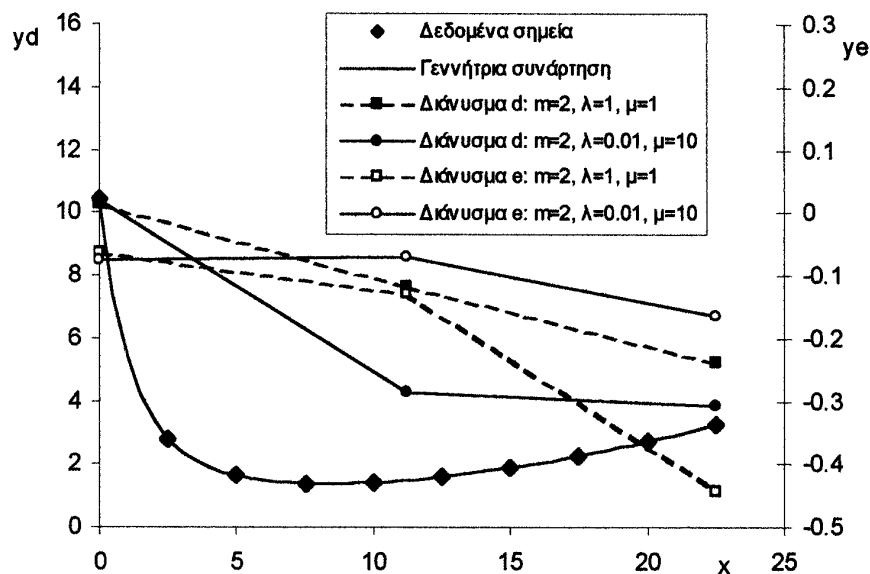
Σχήμα 3-3: Σύγκριση προσαρμοσμένων τεθλασμένων γραμμών (BLSE) με την απλή περίπτωση (BLS) σε 10 δεδομένα σημεία, για διάφορες τιμές τυπικών  $m$

αυτό επιβεβαιώνει την ιδιότητα της μεθόδου ότι η ανάλυσή της  $\delta$ , δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με αυτήν των δεδομένων σημείων αλλά μπορεί να επιλεγεί αραιότερη ή πυκνότερη ανάλογα με τις απαιτήσεις που παρουσιάζει το πρόβλημα που

εξετάζεται. Πρέπει να σημειώσουμε ότι με αλλαγή των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$  μπορούμε να επιτύχουμε ακόμη καλύτερα αποτελέσματα, γεγονός που παρουσιάζεται παρακάτω.

Όσον αφορά την συμπεριφορά της μεθόδου απλής τεθλασμένης (BLS), μπορούμε να πούμε ότι με χρήση 10 τμημάτων και τιμή της παραμέτρου  $\tau = 0.001$ , η οποία πρακτικά δίνει τα καλύτερα αποτελέσματα, τα αποτελέσματα είναι ανάλογα με αυτά της διπλής τεθλασμένης (BLSE). Όταν όμως χρησιμοποιούμε δύο διαστήματα ( $m=2$ ), τότε είναι προφανές από το Σχήμα 3-3 ότι δεν μπορεί να ακολουθήσει την μορφή της συνάρτησης  $y$ , πράγμα που ενισχύει την υιοθέτηση της χρήσης της μεθόδου διπλής τεθλασμένης, με μικρό αριθμό τμημάτων και κατ' επέκταση μικρές υπολογιστικές απαιτήσεις.

Στο Σχήμα 3-4 παρουσιάζονται οι μεταβολές των διανυσμάτων  $d$  και  $e$ , για δύο τμήματα ( $m=2$ ) για την μέθοδο εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη γραμμή, ενώ στο Σχήμα 3-5 παρουσιάζεται η σύνθεση των δύο διανυσμάτων, δηλαδή το τελικό αποτέλεσμα της μεθόδου, με την συνάρτηση  $y$ . Παρατηρούμε ότι ο συνδυασμός των

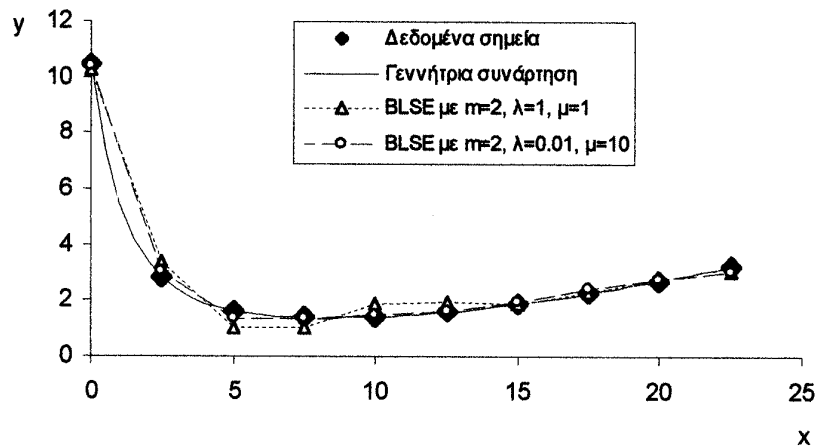


Σχήμα 3-4: Μεταβολές των διανυσμάτων  $d$ ,  $e$  για  $m=2$  και διαφορετικές τιμές  $\lambda$ ,  $\mu$ , σε σύγκριση με τα δεδομένα σημεία

δύο διαφορετικών τιμών για τις παραμέτρους  $\lambda$  και  $\mu$  ( $\lambda=0.01$  και  $\mu=10$ ), δίνει πολύ καλύτερα αποτελέσματα από ότι η χρήση μιας κοινής τιμής και για τις δύο παραμέτρους. Αυτό είναι προκύπτει από το Σχήμα 3-5 αλλά και από την τιμή του

σχετικού μέσου τετραγωνικού σφάλματος<sup>1</sup> που υπολογίστηκε στην πρώτη περίπτωση 4.9%, ενώ στην δεύτερη περίπτωση ήταν 11.5%, δηλαδή 2.4 φορές μεγαλύτερο. Η διερεύνηση που έγινε για διάφορες τιμές τμημάτων  $m$  και παραμέτρων  $\lambda, \mu$  έδειξε ότι καθώς μεγαλώνει ο αριθμός των διαστημάτων, τόσο το διάνυσμα  $d$  ακολουθεί την μορφή της συνάρτησης  $y$ , ενώ όταν μικραίνει τότε το διάνυσμα  $e$  ακολουθεί την μορφή της συνάρτησης  $t$ .

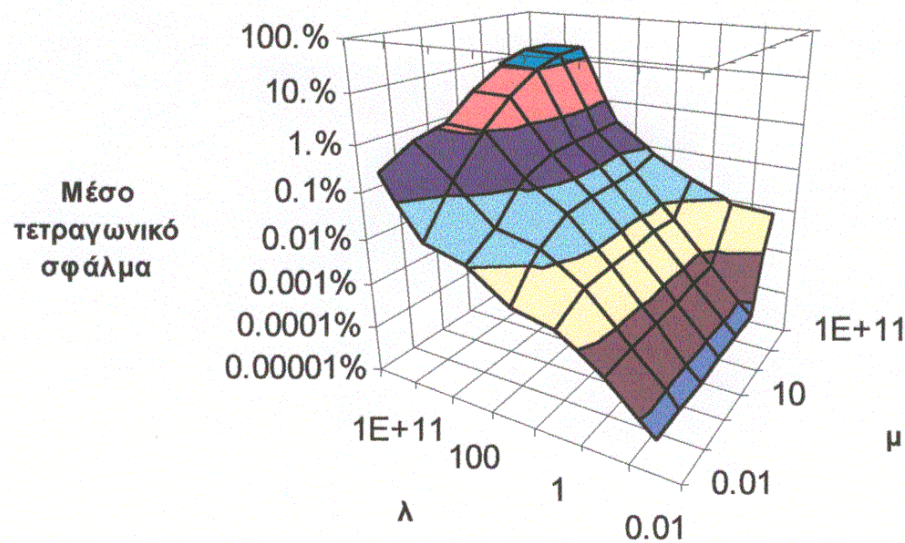
Για να ελέγξουμε την επιρροή των παραμέτρων,  $\lambda$  και  $\mu$ , εφαρμόσαμε την μέθοδο για διάφορες τιμές τους, ενώ για να ελαχιστοποιήσουμε την επιρροή του αριθμού των τμημάτων  $m$ , χρησιμοποιήσαμε σε όλες τις δοκιμές μια μεγάλη τιμή που ήταν 25 τμήματα. Οι τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$  ήταν  $10^{-2}$ ,  $10^{-1}$ , 1, 10,  $10^2$ ,  $10^6$  και  $10^{11}$



Σχήμα 3-5: Σύγκριση του τελικού αποτελέσματος της μεθόδου με την συνάρτηση  $y$ , με διαφορετικές τιμές των παραμέτρων  $\lambda, \mu$  για  $m=2$

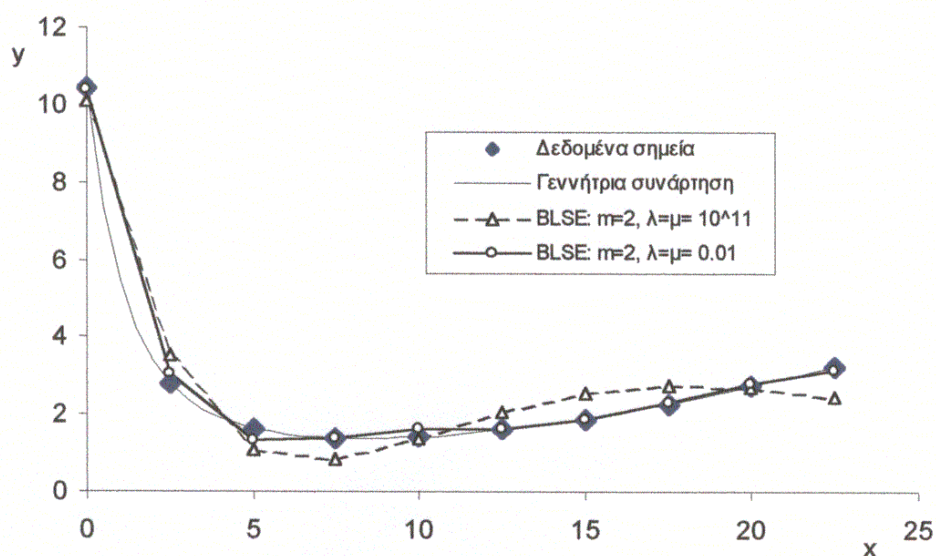
αντίστοιχα, καθώς και οι συνδυασμοί μεταξύ τους. Αυτές επιλέχθηκαν σαν οι πιο αντιπροσωπευτικές μετά από δοκιμές και ορίζουν το εύρος διακύμανσης των δύο παραμέτρων, έτσι ώστε να αποτελούν οδηγό για μετέπειτα εφαρμογές, χωρίς όμως να αποκλείουν την χρήση άλλων τιμών μικρότερων ή μεγαλύτερων από τον χρήστη.

<sup>1</sup> Το σχετικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα δίνεται από τον τύπο: 
$$R = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 / n}}{\bar{x}} * 100$$



Σχήμα 3-6: Μεταβολή του τετραγωνικού σφάλματος για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$

Τα αποτελέσματα παρουσιάζονται στο Σχήμα 3-6, και είναι απολύτως σύμφωνα με την υπόθεση της εισαγωγής των πολλαπλασιαστών  $\lambda$  και  $\mu$ , ως μέτρων ελέγχου του τετραγωνικού σφάλματος της μεθόδου και κατ' επέκταση ως παραγόντων εξομάλυνσης (βλέπε εξίσωση 3.19). Είναι προφανές ότι για μικρές τιμές των  $\lambda$  και  $\mu$ , έχουμε μικρό σφάλμα ενώ καθώς οι τιμές τους μεγαλώνουν, αυτό μεγαλώνει ανάλογα. Όταν οι παράμετροι  $\lambda$  και  $\mu$ , λάβουν την τιμή  $10^{11}$ , η οποία πρακτικά ισοδυναμεί με το άπειρο, τότε έχουμε και την μεγαλύτερη τιμή του τετραγωνικού σφάλματος.



Σχήμα 3-7: Μεταβολή της μορφής της προσαρμοσμένης τεθλασμένης γραμμής (BLSE), για τις ακραίες τιμές των παραμέτρων  $\lambda$ ,  $\mu$

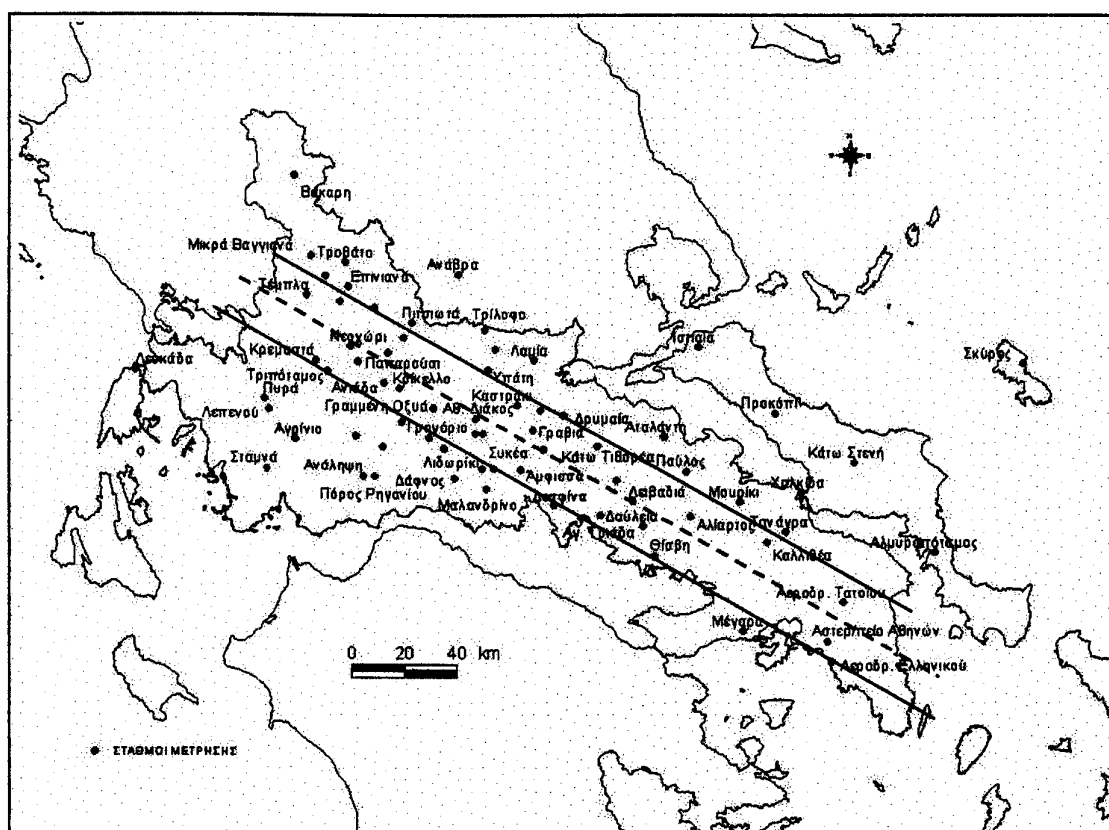


Τέλος, στο Σχήμα 3-7 παρουσιάζονται δύο σενάρια εφαρμογής της μεθόδου για αριθμό διαστημάτων  $m=2$  και για τις ακραίες τιμές των πολλαπλασιαστών  $\lambda, \mu$  που είναι  $10^{-2}$  και  $10^{11}$ . Είναι προφανές ότι στην περίπτωση που και οι δύο παράμετροι παίρνουν την μικρότερη τιμή έχουμε την καλύτερη προσαρμογή των αποτελεσμάτων της μεθόδου στα δεδομένα σημεία, ενώ στην περίπτωση χρήσης του άνω ορίου για την τιμή των δύο παραμέτρων έχουμε μια προσαρμοσμένη γραμμή με μεγαλύτερη καμπυλότητα.

#### 3.5.4 Εφαρμογή της μεθόδου στην Στερεά Ελλάδα για ετήσιες βροχοπτώσεις

Η δεύτερη εφαρμογή της μεθόδου έγινε για την μέση βροχόπτωση στην περιοχή της Στερεάς Ελλάδας. Οι μέσες βροχοπτώσεις είναι το βασικό στοιχείο που χρησιμοποιείται σε μελέτες που αφορούν το αντικείμενο της Υδρολογίας και η διαθεσιμότητα των στοιχείων είναι αρκετά ικανοποιητική ώστε να μας εξασφαλίζει αντιπροσωπευτικό δείγμα για ολόκληρη την περιοχή που μας ενδιαφέρει. Τα στοιχεία προήλθαν από μετρήσεις των ετών 1950 ως 1994, ανάλογα με τους σταθμούς μέτρησης (Χριστοφίδης και Μαμάσης, 1995).

Επειδή η μέθοδος αναφέρεται σε μία διάσταση για να μπορέσουμε να την εφαρμόσουμε προβάλαμε σε μία ευθεία τις θέσεις των σταθμών, οι οποίοι περικλείονται σε μια λωρίδα πλάτους 15 km αριστερά και δεξιά της ευθείας. Η επιλογή του πλάτους και της θέσης αυτής της λωρίδας έγινε αυθαίρετα, με σκοπό το να περιλαμβάνει όσο το δυνατόν περισσότερους σταθμούς ενώ η προβολή των θέσεων των σταθμών πάνω στην ευθεία έγινε με γραφικό τρόπο. Όμως η παραπάνω παραδοχή της μια διάστασης δεν αποτελεί λόγο για την μη εφαρμοσιμότητα της μεθόδου, μιας και όλες οι προϋποθέσεις εφαρμογής της ισχύουν. Στο Σχήμα 3-8 παρουσιάζεται η θέση της ευθείας (διακεκομμένη) πάνω στο χάρτη της Στερεάς Ελλάδας, όπως και οι πραγματικές θέσεις των σταθμών που χρησιμοποιήθηκαν στην εφαρμογή. Στον Πίνακα 3-1 παρουσιάζονται οι αποστάσεις των σταθμών σε ευθεία γραμμή καθώς και το υψόμετρο και η τιμή της ετήσιας βροχόπτωσης του καθενός από αυτούς.



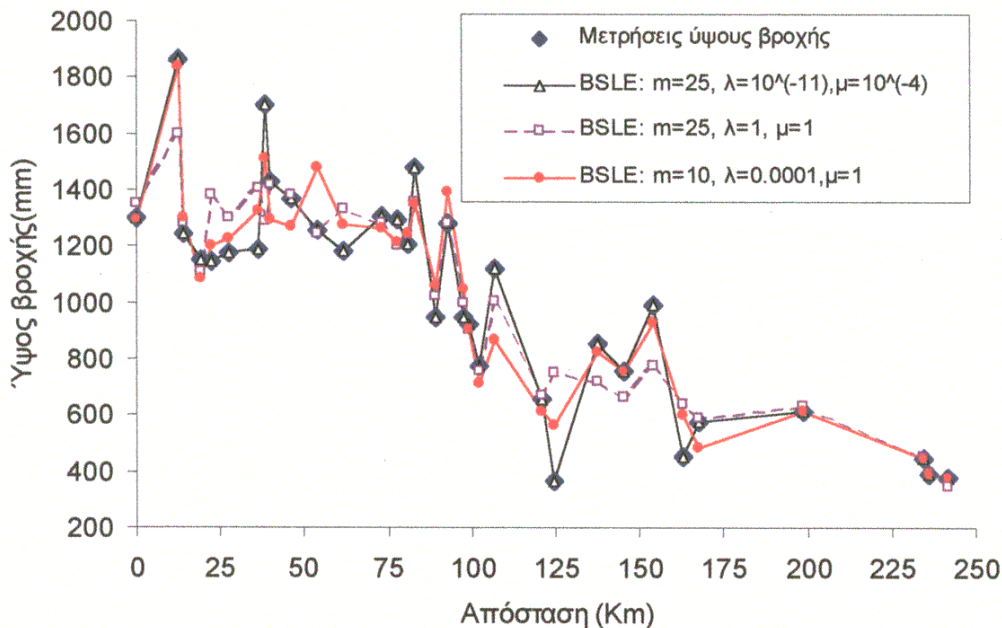
Σχήμα 3-8: Θέση της λωρίδας πλάτους 30km, πάνω στο χάρτη της Στερεάς Ελλάδας, και οι σταθμοί μέτρησης βροχόπτωσης που χρησιμοποιήθηκαν στην δεύτερη εφαρμογή

Πίνακας 3-1: Τιμές βροχόπτωσης, υψόμετρου και απόσταση των 33 σταθμών μέτρησης στην Στερεά Ελλάδα, που χρησιμοποιούνται στην δεύτερη εφαρμογή

A/A	Όνομα Σταθμού	Βροχόπτωση (mm)	Υψόμετρο (m)	Απόσταση (km)
1	Τέμπλα	1301.0	306	0.0
2	Μοναστηράκι	1861.0	660	12.3
3	Κρεμαστά	1243.4	390	13.8
4	Άγιος Βλάσιος	1152.8	850	19.2
5	Γέφ. Επισκοπής	1147.7	277	22.3
6	Παπαρούσι	1174.3	660	27.7
7	Καρπενήσι	1186.9	960	36.2
8	Νεοχώρι	1702.9	800	38.5

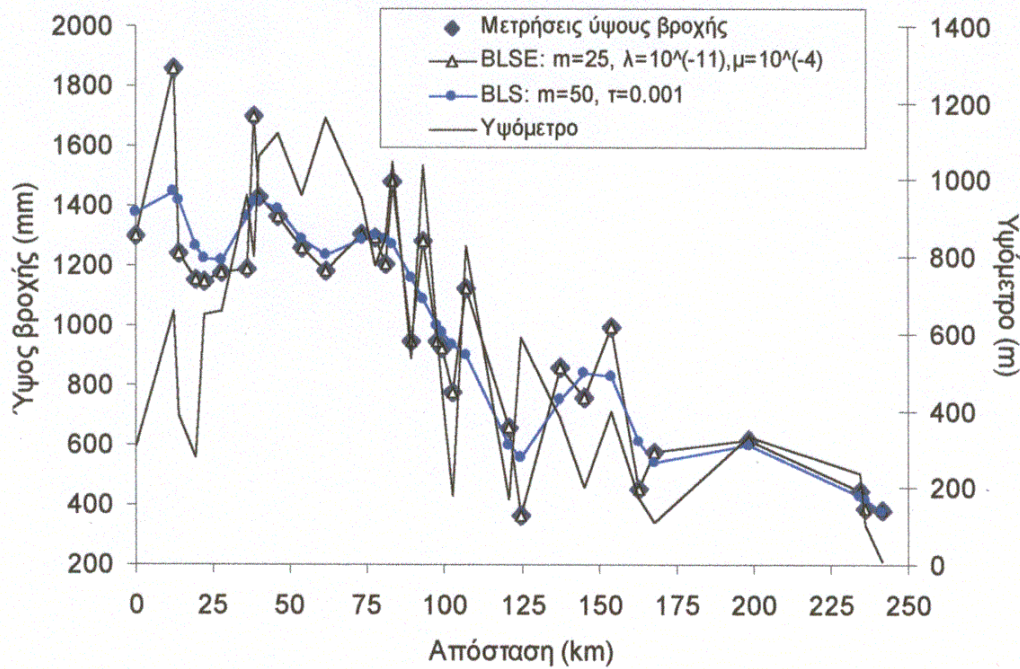
9	Ανιάδα	1429.1	1060	40.0
10	Κρίκελλο	1366.0	1120	46.2
11	Αράχωβα	1259.6	960	53.8
12	Οξύα	1184.5	1160	61.5
13	Πενταγιοί	1307.4	950	73.1
14	Συκέα	1295.7	780	77.7
15	Κονιάκος	1205.6	850	80.8
16	Διάκος	1480.4	1050	83.1
17	Λιδωρίκι	946.5	537	89.2
18	Καρούτες	1285.1	1040	93.1
19	Άνω Μπράλος	946.9	600	97.7
20	Γραβιά	925.2	450	99.2
21	Άμφισσα	776.5	180	102.3
22	Επτάλοφος	1122.0	830	106.9
23	Τιθορέα	658.2	170	120.8
24	Δεσφίνα	365.5	590	124.6
25	Δαύλεια	856.0	380	137.7
26	Λειβαδιά	759.1	200	145.4
27	Αγία Τριάδα	994.6	400	153.8
28	Θίσβη	452.8	174	163.1
29	Αλίαρτος	576.6	110	167.7
30	Καλλιθέα	615.2	333	198.5
31	Αερ. Τατοΐου	447.9	237	234.6
32	Αστερ. Αθηνών	389.6	107	236.2
33	Αερ. Ελληνικού	379.9	10	241.5

Για να γίνει η επαλήθευση της μεθόδου υποθέσαμε ότι οι 33 σταθμοί αποτελούν τα γνωστά σημεία και συγχρόνως τα σημεία στα οποία θα εκτιμηθεί η τιμή του ύψους της ετήσιας βροχόπτωσης, ώστε να έχουμε μέτρο σύγκρισης των αποτελεσμάτων της μεθόδου.



**Σχήμα 3-9:** Συναρτήσεις παρεμβολής/ εξομάλυνσης διπλής τεθλασμένης γραμμής (BSLE) στα 33 σημεία μέτρησης βροχόπτωσης στην Στερεά Ελλάδα, για διάφορες τιμές των παραμέτρων εξομάλυνσης  $\lambda$ ,  $\mu$  και τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής  $m$

Στο Σχήμα 3-9 παρουσιάζονται οι συναρτήσεις παρεμβολής/ εξομάλυνσης διπλής τεθλασμένης γραμμής (BSLE) στα 33 σημεία μέτρησης βροχόπτωσης στην Στερεά Ελλάδα, για διάφορες τιμές των παραμέτρων εξομάλυνσης  $\lambda$ ,  $\mu$  και τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής  $m$ . Οι τιμές των παραμέτρων επιλέχθηκαν μετά από δοκιμές και είναι οι  $10^{-11}$  και 1 για το  $\lambda$  ενώ για το  $\mu$   $10^{-4}$  και 1 αντίστοιχα, ενώ για το πλήθος των τμημάτων, δηλαδή την ανάλυση της γραμμής επιλέχθηκαν δύο τιμές: 25 για υψηλή ανάλυση και 10 για χαμηλή ανάλυση. Τα μητρώα που παράγονται για την λύση του συστήματος της εξίσωσης (3.29) είναι  $52 \times 52$  και  $22 \times 22$  αντίστοιχα. Είναι προφανές ότι η μέθοδος είναι φειδωλή σε υπολογιστικές απαιτήσεις, μιας και για την εφαρμογή της σε μήκος 241.5 km απαιτεί πολύ μικρή διακριτοποίηση σε σχέση με άλλες μεθόδους.



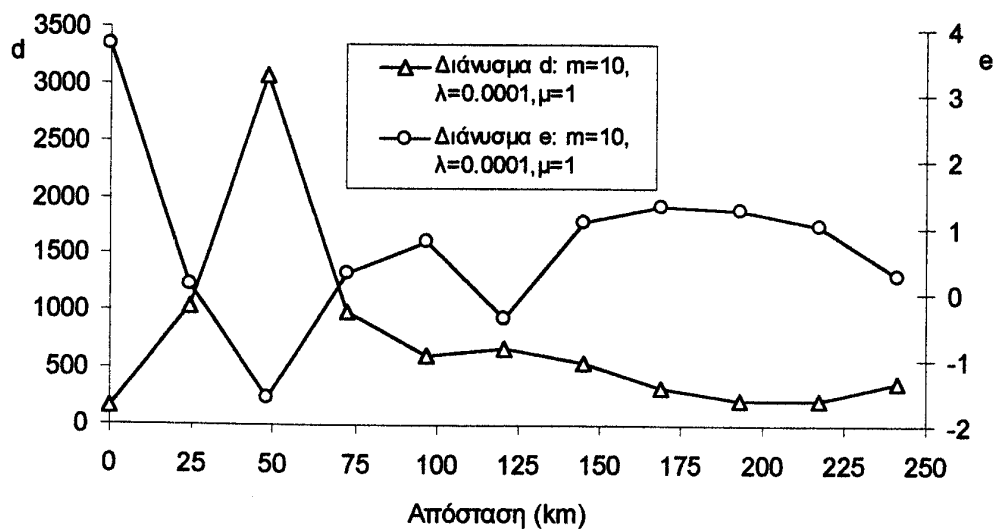
**Σχήμα 3-10:** Σύγκριση των δύο μεθόδων εξομάλυνσης με γραμμή για τις τιμές των παραμέτρων που δίνουν το μικρότερο σφάλμα

Από το Σχήμα 3-9 και για την υψηλή ανάλυση, είναι προφανές ότι όταν χρησιμοποιούμε τις μικρότερες τιμές της παραμέτρου εξομάλυνσης  $\lambda$ , έχουμε την καλύτερη προσαρμογή στα δεδομένα σημεία, πράγμα που το επαληθεύει και το μέσο τετραγωνικό σφάλμα που παρουσιάζεται στον Πίνακα 3-2. Όσο μεγαλώνει η τιμή του  $\lambda$  τόσο έχουμε μια πιο ομαλή γραμμή, όμως με ανάλογη αύξηση του μέσου τετραγωνικού σφάλματος. Όσον αφορά την χαμηλή ανάλυση, τα αποτελέσματα ακολουθούν τις μετρήσεις σε τέτοιο βαθμό που δεν κάνουν απαγορευτική την χρήση της ειδικά αν το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε αφορά περισσότερο την εξομάλυνση και όχι την παρεμβολή στα δεδομένα σημεία. Τα παραπάνω ενισχύονται και από την τιμή του μέσου τετραγωνικού σφάλματος που είναι ίσο με 10.2 %, τιμή που είναι μικρότερη από αυτές που προέκυψαν για την υψηλή ανάλυση και τιμές των παραμέτρων  $\lambda$ ,  $\mu$  ίσες με 1. Το συμπέρασμα που προέκυψε από την χρήση των δύο διαφορετικών αναλύσεων είναι ότι μπορούμε να επιτύχουμε πολύ καλά αποτελέσματα με μικρές αναλύσεις, αλλά όσο μικραίνει η ανάλυση τόσο πιο επισταμένη διερεύνηση των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$  απαιτείται.

**Πίνακας 3-2:** Μέσο τετραγωνικό σφάλμα της μεθόδου για διάφορες τιμές των παραμέτρων  $\lambda$ ,  $\mu$  και ανάλυσης  $m$

$m$	$\lambda=10^{-11}, \mu=10^{-4}$	$\lambda=1, \mu=1$	$\lambda=10^{-4}, \mu=1$
25	0.0002 %	14.2 %	
10			10.2 %

Στο Σχήμα 3-10 παρουσιάζεται η σύγκριση με την απλή μέθοδο εξομάλυνσης με τεθλασμένη, δηλαδή χωρίς την επιρροή του παράγοντα του υψομέτρου, ενώ συγχρόνως παρουσιάζεται και η μεταβολή του υψομέτρου κατά το μήκος της θεωρούμενης ευθείας. Είναι προφανές ότι η μέθοδος εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη ακολουθεί τις μετρήσεις πολύ καλύτερα παρόλο το γεγονός ότι για την απλή περίπτωση επιλέχθηκε μεγαλύτερη ανάλυση ( $m=50$ ), με σκοπό να επιτύχουμε την όσο δυνατόν μεγαλύτερη ακρίβεια της μεθόδου. Και για τις δύο περιπτώσεις οι τιμές των παραμέτρων εξομάλυνσης ήταν αυτές που δίνουν το μικρότερο μέσο



**Σχήμα 3-11:** Μεταβολές των διανυσμάτων  $d$ ,  $e$  για  $m=10$  και τιμές των παραμέτρων  $\lambda, \mu$  που δίνουν το μικρότερο σφάλμα

τετραγωνικό σφάλμα.

Από το Σχήμα 3-10 επίσης προκύπτει ότι οι μεγαλύτερες διαφορές των δύο μεθόδων προκύπτουν στις περιπτώσεις που έχουμε μεταβολές του υψομέτρου, πράγμα που αποδεικνύει ότι η μέθοδος εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη έχει όντως

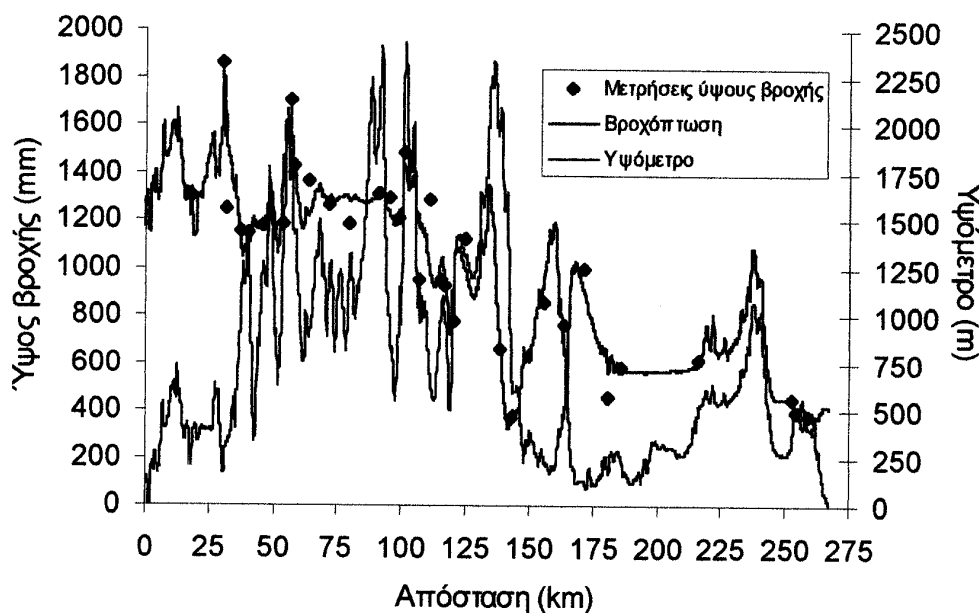


καλύτερα αποτελέσματα στην περίπτωση που έχουμε επιρροή ενός άλλου παράγοντα πάνω στην μεταβλητή που μας ενδιαφέρει.

Στο Σχήμα 3-11 παρουσιάζονται οι μεταβολές των διανυσμάτων  $d$  και  $e$  για την χαμηλή ανάλυση ( $m=10$ ) και για τιμές των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$  που δίνουν το μικρότερο σφάλμα. Παρατηρούμε ότι έχουμε ομαλές μεταβολές των τιμών των δύο διανυσμάτων, πράγμα που έχει ως αποτέλεσμα την παραγωγή μιας πιο ομαλής καμπύλης όπως φαίνεται και στο Σχήμα 3-9.

Μια άλλη εφαρμογή της μεθόδου, ήταν ο υπολογισμός της μέσης ετήσιας βροχόπτωσης σε διάφορα τυχαία σημεία κατά μήκος της διακεκομμένης ευθείας του Σχήματος 3-8, της οποίας το συνολικό μήκος ήταν 267 km. Για το λόγο αυτό υπολογίσαμε την τιμή της βροχόπτωσης με βάση έναν πολύ πυκνό κάρναβο υψομέτρου, με τιμές ανά 65 m (4107 συνολικά σημεία, κατά μήκος της ευθείας) ο οποίος προήλθε από επεξεργασία τοπογραφικών και υδρολογικών δεδομένων, η οποία υλοποιήθηκε στον Τομέα Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων. Σαν γνωστά σημεία χρησιμοποιήσαμε τις 33 τιμές βροχόπτωσης των σταθμών του προηγούμενου παραδείγματος, ενώ όσον αφορά τις παραμέτρους της μεθόδου χρησιμοποιήσαμε τις τιμές που αντιστοιχούσαν στη χαμηλή ανάλυση ( $m=10$ ,  $\lambda=10^{-4}$  και  $\mu=1$ ). Τα αποτελέσματα καθώς και η μεταβολή του υψομέτρου παρουσιάζονται στο Σχήμα 3-12.

Από το παρακάτω σχήμα είναι προφανές ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου ακολουθούν την υπόθεση της εξάρτησης της τιμής της βροχόπτωσης από το υψόμετρο, ενώ συγχρόνως διατηρείται η συσχέτιση των αποτελεσμάτων με τις μετρήσεις των σταθμών. Πρέπει να τονιστεί ότι οι διαφορές που παρουσιάζονται σε μερικές από τις θέσεις των σταθμών μεταξύ των Σχημάτων 3-12 και 3-9, οφείλονται στο ότι για την εκτίμηση του ύψους βροχής στη περίπτωση του Σχήματος 3-12 χρησιμοποιήθηκαν τα πραγματικά υψόμετρα στις συγκεκριμένες θέσεις και όχι των σταθμών. Παρόλα αυτά οι εκτιμήσεις σε όλα τα γνωστά σημεία ήταν καλές αφού το σχετικό μέσο σφάλμα ήταν 10.7%.



Σχήμα 3-12: Υπερετήσια βροχόπτωση σε σημεία κατά μήκος της διακεκομμένης ευθείας του Σχήματος 3-8 για αριθμό τμημάτων  $m=10$  και τιμές παραμέτρων  $\lambda=10^{-4}$  και  $\mu=1$

### 3.6 Συμπεράσματα του Κεφαλαίου 3

Στο παρόν κεφάλαιο αναπτύχθηκε μια μέθοδος εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη γραμμή η οποία περιλαμβάνει με αντικειμενικό τρόπο την επίδραση του υψόμετρου της περιοχής ενδιαφέροντος. Αυτό επιτεύχθηκε με την εισαγωγή του παράγοντα του υψόμετρου στην έκφραση της παρεμβολής και άρα ενός επιπλέον παράγοντα εξομάλυνσης ο οποίος εξαρτάται από το υψόμετρο και κατ' επέκταση ρυθμίζει και την επιρροή του στα τελικά αποτελέσματα της μεθόδου. Η μέθοδος έχει την δυνατότητα υπολογισμού της τιμής της βροχόπτωσης σε τυχαία σημεία πάνω στον άξονα των  $x$ , αρκεί αυτά να βρίσκονται μέσα στο διάστημα που έχουμε ορίσει εξαρχής και να είναι γνωστό το υψόμετρό τους.

Η μέθοδος επαληθεύτηκε με δύο εφαρμογές, η πρώτη αφορούσε ένα αριθμητικό παράδειγμα το οποίο χρησίμευσε για την διερεύνησή της και μία δεύτερη στην οποία χρησιμοποιήθηκαν οι υπερετήσιες βροχοπτώσεις από 33 σταθμούς μέτρησης της Στερεάς Ελλάδας. Στο πλαίσιο της δεύτερης εφαρμογής υπολογίστηκαν οι τιμές της υπερετήσιας βροχόπτωσης σε μία μηκοτομή της Στερεάς Ελλάδας.

Τα αποτελέσματα και των δύο εφαρμογών επιβεβαίωσαν την δυνατότητα της μεθόδου να παράγει αξιόπιστα αποτελέσματα με μικρές υπολογιστικές απαιτήσεις. Το

συμπέρασμα που προέκυψε από την χρήση διαφορετικών αναλύσεων είναι ότι μπορούμε να επιτύχουμε πολύ καλά αποτελέσματα με μικρές αναλύσεις, αλλά όσο μικραίνει η ανάλυση τόσο πιο επισταμένη διερεύνηση των παραμέτρων  $\lambda$  και  $\mu$  απαιτείται.

Επίσης τα αποτελέσματα και των δύο εφαρμογών έδειξαν μια σαφή υπεροχή της διπλής τεθλασμένης έναντι της απλής τεθλασμένης γραμμής, ειδικά όταν χρησιμοποιούμε μικρές αναλύσεις. Οι μεγαλύτερες διαφορές των δύο μεθόδων παρουσιάστηκαν στα σημεία που είχαμε σημαντικές μεταβολές της παραμέτρου  $t$ , πράγμα που ήταν αναμενόμενο.

ΠΑΡΕΜΒΟΛΗ & ΕΞΟΜΑΛΥΝΣΗ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ  
ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΔΙΠΛΗΣ ΤΕΘΛΑΣΜΕΝΗΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΣ

#### 4.1 Γενικά

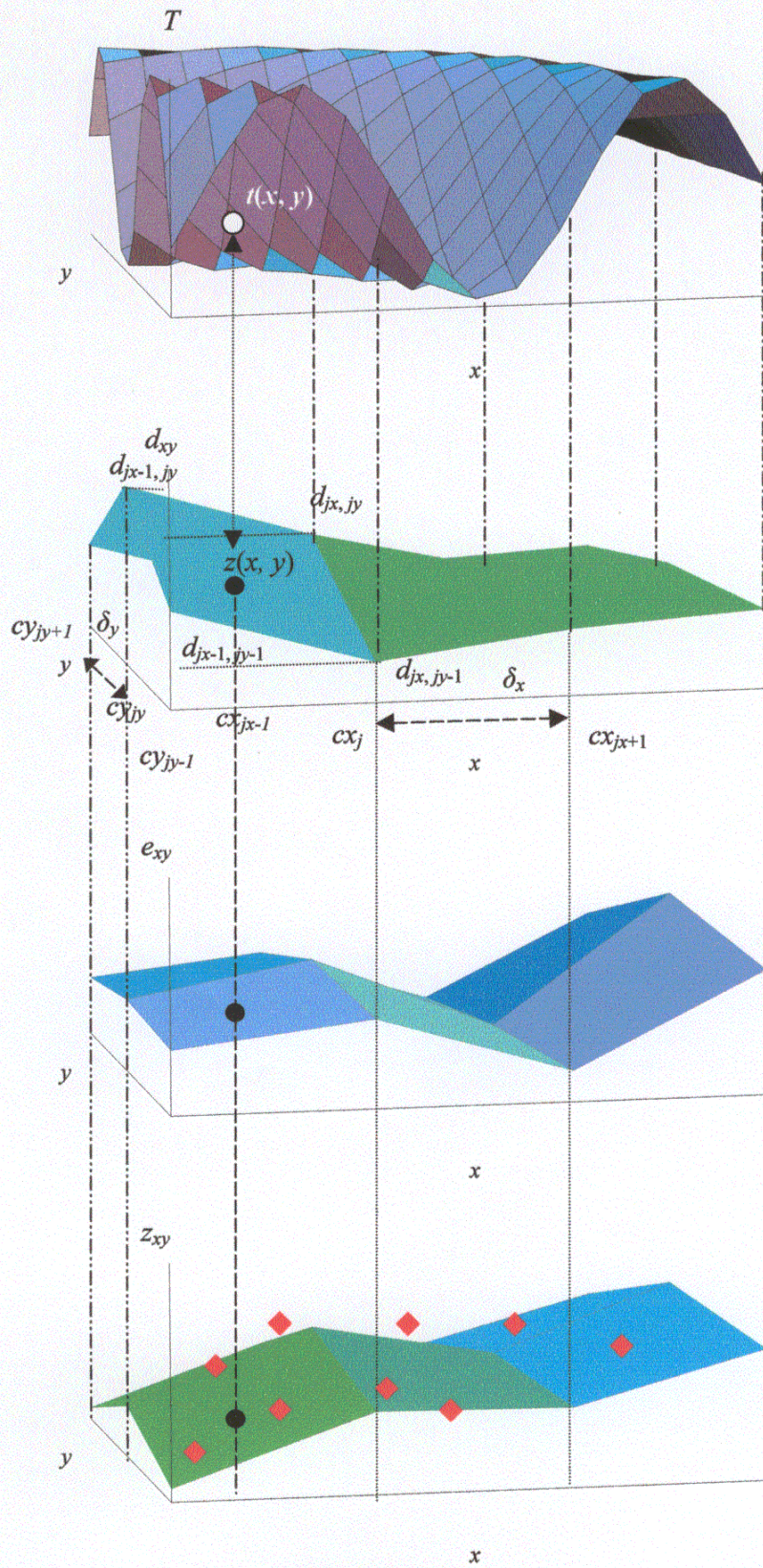
Στην ανάλυση φυσικών προβλημάτων είμαστε αναγκασμένοι να δεχθούμε ότι η μεταβλητότητα των φαινομένων δεν μπορεί να περιγραφεί ικανοποιητικά από μία διάσταση και συνήθως καταφεύγουμε στο να χρησιμοποιούμε μεθόδους που αναφέρονται σε περισσότερες από μία. Για το λόγο αυτό, προσαρμόσαμε την μέθοδο εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη γραμμή σε δύο διαστάσεις με σκοπό την δημιουργία μιας μεθόδου η οποία θα ανταποκρίνεται στην πλήρη γεωγραφική μεταβλητότητα των φυσικών μεταβλητών, ενώ παράλληλα θα δίνει σημαντικές δυνατότητες ελέγχου στον μελετητή.

Στην συνέχεια παρουσιάζεται το μαθηματικό υπόβαθρο της μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη επιφάνεια, το οποίο διαφέρει με αυτό της μιας διάστασης κυρίως στους ορισμούς των μητρώων που εμπλέκονται. Επίσης αναλύεται η υλοποίηση της μεθόδου σε υπολογιστικό περιβάλλον, η οποία είναι σημαντική συνιστώσα μιας και οι απαιτήσεις της μεθόδου είναι αυξημένες σε σχέση με την μία διάσταση. Τέλος, γίνεται η εφαρμογή της μεθόδου σε ένα πραγματικό πρόβλημα που είναι η παραγωγή του βροχομετρικού χάρτη της Στερεάς Ελλάδας και η σύγκριση των αποτελεσμάτων της με αυτά της μεθόδου της αντίστροφης απόστασης.

#### 4.2 Προσαρμογή της μεθόδου σε δύο διαστάσεις

##### 4.2.1 Ορισμοί

Έστω  $z_i(x_i, y_i)$  ένα σύνολο  $n$  σημείων σε χώρο τριών διαστάσεων  $(x, y, z)$  για  $i = 1, \dots, n$ , και  $cx_{jx}, jx = 0, \dots, mx, mx+1$  σημεία στον άξονα των  $x$  και  $cy_{jy}, jy = 0, \dots, my, my+1$  σημεία στον άξονα των  $y$ , έτσι ώστε το ορθογώνιο με κορυφές  $(cx_0, cy_0)$ ,  $(cx_{mx}, cy_0)$ ,  $(cx_0, cy_{my})$  και  $(cx_{mx}, cy_{my})$  να περιέχει όλα τα σημεία  $z_i$ . Υποθέτουμε ότι τα σημεία στον κάθε άξονα ισαπέχουν, δηλαδή  $cx_{jx} - cx_{jx-1} = \delta x$  και  $cy_{jy} - cy_{jy-1} = \delta y$ .



Σχήμα 4-1: Διάγραμμα ορισμών για την επέκταση της μεθόδου εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή για δύο διαστάσεις

Επίσης για κάθε σημείο  $x$  είναι γνωστή και η τιμή μιας παραμέτρου  $t$ , η οποία για τις ανάγκες της παρούσας εργασίας είναι το υψόμετρο. Άρα σε κάθε σημείο  $z_i(x_i, y_i)$  αντιστοιχεί μία τιμή της παραμέτρου  $t(x_i, y_i)$ , με  $i=1, \dots, n$  και σε κάθε σημείο  $z_j(cx_{jx}, cy_{jy})$ , με  $j=0, \dots, m$ , όπου  $m:= \{(mx+1)(my+1) - 1\}+1$ , αντιστοιχεί μία τιμή της παραμέτρου  $t(cx_{jx}, cy_{jy})$ , με  $jx=0, \dots, mx$  και  $jy=0, \dots, my$ .

Αυτό το σύνολο σημείων γνωστού υψομέτρου στην πράξη μπορεί να μην περιλαμβάνει τις τιμές της παραμέτρου σε κάθε  $x$ , αλλά στα σημεία ενός καννάβου οσοδήποτε πυκνού μας ενδιαφέρει και είναι δυνατόν να προέρχεται από επεξεργασία γεωγραφικών πληροφοριών, αποτελώντας πληροφορία εύκολα προσβάσιμη στους μελετητές.

Θέλουμε να βρούμε τις  $\{(mx+1)(my+1) - 1\}+1 =: m+1$  τιμές  $d_j$  και  $e_j$ , στο επίπεδο  $(x, y)$ , έτσι ώστε η επιφάνεια που ορίζεται από τα  $m+1$  σημεία  $(cx_{jx}, cy_{jy}, d_j + t(cx_{jx}, cy_{jy}) e_j)$  να 'ταιριάζει' στο σύνολο των σημείων  $z_i(x_i, y_i)$  λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή των  $m+1$  σημείων  $t(cx_{jx}, cy_{jy})$  πάνω τους. Έτσι, θα έχουμε τη δυνατότητα με βάση τα  $m+1$  ζεύγη  $d_j, e_j$  να μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές του  $z$  σε τυχαία σημεία πάνω στο επίπεδο  $(x, y)$ , τα οποία θα διαφέρουν από τις  $m+1$  κορυφές, αρκεί αυτά να βρίσκονται μέσα στο ορθογώνιο με κορυφές  $(cx_0, cy_0)$ ,  $(cx_{mx}, cy_0)$ ,  $(cx_0, cy_{my})$  και  $(cx_{mx}, cy_{my})$  και να είναι γνωστό το υψόμετρό τους.

Σε αναλογία με την μία διάσταση η αρχική προσαρμογή γίνεται ελαχιστοποιώντας το συνολικό τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ των αρχικών σημείων  $z_i(x_i, y_i)$  και των σημείων της τεθλασμένης επιφάνειας  $(cx_{jx}, cy_{jy}, d_j + t_j e_j)$ , δηλαδή:

$$p = \sum_{i=1}^n (z_i - \hat{z}_i)^2 \quad (4.1)$$

όπου  $\hat{z}_i$  είναι η εκτίμηση του  $z_i$  που προκύπτει από την τεθλασμένη επιφάνεια για τα γνωστά σημεία  $z_i(x_i, y_i)$ . Η προηγούμενη εξίσωση συνοπτικά μπορεί να γραφτεί με την μορφή:

$$p = \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|^2 \quad (4.2)$$

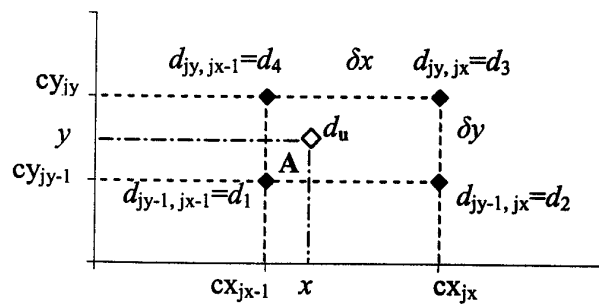
όπου  $\mathbf{z} = [z_0, \dots, z_n]^T$  είναι το διάνυσμα των γνωστών κατηγομένων των δεδομένων σημείων, με μέγεθος  $n$  (ο εκθέτης  $T$  εκφράζει τον ανάστροφο πίνακα ή διάνυσμα) και  $\hat{\mathbf{z}} = [\hat{z}_0, \dots, \hat{z}_n]^T$  είναι το διάνυσμα των εκτιμήσεων με μέγεθος  $n$ .

Η γενική συνάρτηση εκτίμησης θα είναι:

$$\hat{z}_u = d_u + t_u e_u \quad (4.3)$$



όπου με  $u$  συμβολίζουμε ένα σημείο στο επίπεδο  $x, y$ , ενώ τα  $d_u, e_u$  είναι οι κατηγμένες των αντίστοιχων τεθλασμένων επιφανειών στο σημείο  $u = (x, y)$  (βλέπε Σχήμα 4-1).



Σχήμα 4-2: Διάγραμμα ορισμών για τον υπολογισμό του  $d_u$

#### 4.2.2 Υπολογισμός των $d_u$ και $e_u$

Για να υπολογίσουμε την τιμή της κατηγμένης της τεθλασμένης επιφάνειας  $d$  θεωρούμε το Σχήμα 4-2, στο οποίο γνωρίζουμε τις τιμές των μεταβλητών  $d$  στα τέσσερα σημεία τα οποία περικλείουν το σημείο  $A$  με συντεταγμένες  $u = (x, y)$ , στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε την μεταβλητή  $d_u$  καθώς επίσης και τις συντεταγμένες τους,  $cy_{jy-1}, cy_{jy}$  και  $cX_{jx-1}, cX_{jx}$ .

Υποθέτουμε ότι η τεθλασμένη επιφάνεια  $d$  είναι η απλούστερη δυνατή επιφάνεια δευτέρου βαθμού που διέρχεται από τα τέσσερα σημεία γνωστής κατηγμένης  $d_{jy-1, jx-1}, d_{jy-1, jx}, d_{jy, jx}, d_{jy, jx-1}$ . Για απλούστευση του συμβολισμού τα σημεία αυτά θα τα παριστάνουμε με  $d_1, d_2, d_3$  και  $d_4$  αντίστοιχα. Η εν λόγω επιφάνεια έχει εξίσωση:

$$d_u = a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 \quad (4.4)$$

όπου  $a_1, a_2, a_3$  και  $a_4$  σταθερές. Το πρόβλημα έγκειται στο να υπολογιστούν αυτές οι σταθερές με βάση τα τέσσερα γνωστά σημεία.

Αν εφαρμόσουμε την εξίσωση (4.4) για τα τέσσερα γνωστά σημεία θα πάρουμε τις παρακάτω εξισώσεις:

$$\begin{aligned}
d_1 &= \alpha_1 c_{x_{jx-1}} + \alpha_2 c_{y_{jy-1}} + \alpha_3 c_{x_{jx-1}} c_{y_{jy-1}} + \alpha_4 \\
d_2 &= \alpha_1 c_{x_{jx}} + \alpha_2 c_{y_{jy-1}} + \alpha_3 c_{x_{jx}} c_{y_{jy-1}} + \alpha_4 \\
d_3 &= \alpha_1 c_{x_{jx}} + \alpha_2 c_{y_{jy}} + \alpha_3 c_{x_{jx}} c_{y_{jy}} + \alpha_4 \\
d_4 &= \alpha_1 c_{x_{jx-1}} + \alpha_2 c_{y_{jy}} + \alpha_3 c_{x_{jx-1}} c_{y_{jy}} + \alpha_4
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Οι εξισώσεις (4.5) αποτελούν ένα σύστημα τεσσάρων εξισώσεων, με τέσσερις αγνώστους το οποίο μπορεί να γραφτεί υπό την μορφή μητρώων ως εξής:

$$\mathbf{d} = \mathbf{C} \mathbf{X} \tag{4.6}$$

όπου  $\mathbf{d} = [d_1, d_2, d_3, d_4]^T$ ,  $\mathbf{X} = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]^T$  και  $\mathbf{C}$  είναι ένα τετραγωνικό μητρώο με διαστάσεις  $4 \times 4$  που ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_{x_{jx-1}} & c_{y_{jy-1}} & c_{x_{jx-1}} c_{y_{jy-1}} & 1 \\ c_{x_{jx}} & c_{y_{jy-1}} & c_{x_{jx}} c_{y_{jy-1}} & 1 \\ c_{x_{jx}} & c_{y_{jy}} & c_{x_{jx}} c_{y_{jy}} & 1 \\ c_{x_{jx-1}} & c_{y_{jy}} & c_{x_{jx-1}} c_{y_{jy}} & 1 \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

Η λύση του συστήματος (4.6) είναι η:

$$\mathbf{X} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{d} \tag{4.8}$$

Το μητρώο  $\mathbf{C}$  εφόσον είναι τετραγωνικό έχει αντίστροφο, που είναι:

$$\mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{(c_{x_{jx}} - c_{x_{jx-1}})(c_{y_{jy}} - c_{y_{jy-1}})} \begin{bmatrix} -c_{y_{jy}} & c_{y_{jy}} & -c_{y_{jy-1}} & c_{y_{jy-1}} \\ -c_{x_{jx}} & c_{x_{jx-1}} & -c_{x_{jx-1}} & c_{x_{jx}} \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ c_{x_{jx}} c_{y_{jy}} & -c_{x_{jx-1}} c_{y_{jy}} & c_{x_{jx-1}} c_{y_{jy-1}} & -c_{x_{jx}} c_{y_{jy-1}} \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

Αφού αντικαταστήσουμε στην εξίσωση (4.8) το παραπάνω μητρώο και κάνουμε τις πράξεις, φτάνουμε στο παρακάτω αποτέλεσμα:

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{-c_{y_{jy}} d_1 + c_{y_{jy}} d_2 - c_{y_{jy-1}} d_3 + c_{y_{jy-1}} d_4}{(c_{x_{jx}} - c_{x_{jx-1}})(c_{y_{jy}} - c_{y_{jy-1}})} \\
\alpha_2 &= \frac{-c_{x_{jx}} d_1 + c_{x_{jx-1}} d_2 - c_{x_{jx-1}} d_3 + c_{x_{jx}} d_4}{(c_{x_{jx}} - c_{x_{jx-1}})(c_{y_{jy}} - c_{y_{jy-1}})} \\
\alpha_3 &= \frac{d_1 - d_2 + d_3 - d_4}{(c_{x_{jx}} - c_{x_{jx-1}})(c_{y_{jy}} - c_{y_{jy-1}})} \\
\alpha_4 &= \frac{c_{x_{jx}} c_{y_{jy}} d_1 - c_{x_{jx-1}} c_{y_{jy}} d_2 + c_{x_{jx-1}} c_{y_{jy-1}} d_3 - c_{x_{jx}} c_{y_{jy-1}} d_4}{(c_{x_{jx}} - c_{x_{jx-1}})(c_{y_{jy}} - c_{y_{jy-1}})}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (4.4) τις τιμές των παραμέτρων και μετά από πράξεις καταλήγουμε στο τελικό αποτέλεσμα που δίνει την τιμή της δευτεροβάθμιας επιφάνειας  $d_u$ :

$$d_u = \frac{1}{(cx_{jx}-cx_{jx-1})(cy_{jy}-cy_{jy-1})} [d_1 (cx_{jx}-x)(cy_{jy}-y) + \\ + d_2 (x-cx_{jx-1})(cy_{jy}-y) + d_3 (x-cx_{jx-1})(y-cy_{jy-1}) + \\ + d_4 (cx_{jx}-x)(y-cy_{jy-1})]$$

ή πιο απλά:

$$d_u = \frac{1}{\delta x \delta y} [d_1 (cx_{jx}-x)(cy_{jy}-y) + d_2 (x-cx_{jx-1})(cy_{jy}-y) + \\ + d_3 (x-cx_{jx-1})(y-cy_{jy-1}) + d_4 (cx_{jx}-x)(y-cy_{jy-1})] \quad (4.11)$$

Με παρόμοιο τρόπο προκύπτει και η αντίστοιχη σχέση για την τιμή της τεθλασμένης επιφάνειας  $e_u$ , η οποία είναι:

$$e_u = \frac{1}{\delta x \delta y} [e_1 (cx_{jx}-x)(cy_{jy}-y) + e_2 (x-cx_{jx-1})(cy_{jy}-y) + \\ + e_3 (x-cx_{jx-1})(y-cy_{jy-1}) + e_4 (cx_{jx}-x)(y-cy_{jy-1})] \quad (4.12)$$

#### 4.2.3 Υπολογισμός της εκτίμησης $\hat{z}_i$ για τυχαίο σημείο

Αν το τυχαίο σημείο  $z_i$ , βρίσκεται στο χώρο  $([cx_{jx-1}, cx_{jx}] \times [cy_{jy-1}, cy_{jy}])$  για ορισμένα  $jx$  ( $1 \leq jx \leq mx$ ) και ορισμένα  $jy$  ( $1 \leq jy \leq my$ ) τότε προφανώς η εκτίμηση  $\hat{z}_i$  θα δίνεται από τον τύπο:

$$\hat{z}_i(x_i, y_i, t(x_i, y_i)) = \frac{1}{\delta x \delta y} [d_1 (cx_{jx}-x)(cy_{jy}-y) + d_2 (x-cx_{jx-1})(cy_{jy}-y) + \\ + d_3 (x-cx_{jx-1})(y-cy_{jy-1}) + d_4 (cx_{jx}-x)(y-cy_{jy-1})] + \\ + t(x_i, y_i) [e_1 (cx_{jx}-x)(cy_{jy}-y) + e_2 (x-cx_{jx-1})(cy_{jy}-y) + \\ + e_3 (x-cx_{jx-1})(y-cy_{jy-1}) + e_4 (cx_{jx}-x)(y-cy_{jy-1})] \quad (4.13)$$

Η εξίσωση (4.13) προκύπτει από την προσαρμογή της εξίσωσης (3.9), στην περίπτωση των δύο διαστάσεων.

Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία με την περίπτωση της μίας διάστασης καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση μητρώων:

$$\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} \quad (4.14)$$

όπου  $\hat{\mathbf{z}} = [\hat{z}_0, \dots, \hat{z}_n]^T$  είναι το διάνυσμα των εκτιμήσεων με μέγεθος  $n$ ,  $\mathbf{d} = [d_0, \dots, d_m]^T$  και  $\mathbf{e} = [e_0, \dots, e_m]^T$  είναι τα διανύσματα των αγνώστων κατηγομένων  $d_u, e_u$  με μέγεθος  $m+1$ , δηλαδή  $\{(mx+1)(my+1) - 1\} + 1$ ,  $\mathbf{T}$  είναι ένα διαγώνιο μητρώο με μέγεθος  $n \times n$ , ήτοι:

$$\mathbf{T} = \text{diag}(t(x_1, y_1), \dots, t(x_n, y_n)) \quad (4.15)$$

και  $\mathbf{\Pi}$  είναι ένα μητρώο με μέγεθος  $n \times (m+1)$  (για  $i=1, \dots, n$  και  $j=0, \dots, m$ ) και με τα στοιχεία του να ορίζονται ως εξής:

$$\pi_{ij} = \begin{cases} \frac{(cx_{ix}-x)(cy_{iy}-y)}{\delta x \delta y}, & cx_{jx-1} < x \leq cx_{jx} \text{ και } cy_{jy-1} < y \leq cy_{jy} \\ \frac{(cx_{ix}-x)(y-cy_{iy-1})}{\delta x \delta y}, & cx_{jx-1} < x \leq cx_{jx} \text{ και } cy_{jy} \leq y < cy_{jy+1} \\ \frac{(x-cx_{ix-1})(y-cy_{iy-1})}{\delta x \delta y}, & cx_{jx} \leq x < cx_{jx+1} \text{ και } cy_{jy} \leq y < cy_{jy+1} \\ \frac{(x-cx_{ix-1})(cy_{iy}-y)}{\delta x \delta y}, & cx_{jx} \leq x < cx_{jx+1} \text{ και } cy_{jy-1} < y \leq cy_{jy} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.16)$$

#### 4.2.4 Υπολογισμός των μέτρων τραχύτητας της τεθλασμένης επιφάνειας

Για να αποκτήσουμε ένα μέτρο της τραχύτητας της τεθλασμένης επιφάνειας  $d$ , παρατηρούμε ότι η διαφορά των κλίσεων μεταξύ δύο διαδοχικών τμημάτων της, κατά την διεύθυνση  $x$  δεδομένου ότι τα  $cx_{jx}$  ισαπέχουν, θα είναι για κάθε θέση  $cy_{jy}$ , που βρίσκεται πάνω στον άξονα των  $y$ :

$$\frac{1}{\delta x} (2d_{jx, jy} - d_{jx-1, jy} - d_{jx+1, jy}) \quad (4.17)$$

ενώ κατά την διεύθυνση  $y$  δεδομένου ότι τα  $cy_{jy}$  ισαπέχουν, θα είναι για κάθε σημείο  $cx_{jx}$ , που βρίσκεται πάνω στον άξονα των  $x$ :

$$\frac{1}{\delta y} (2d_{jy, jx} - d_{jy-1, jx} - d_{jy+1, jx}) \quad (4.18)$$

άρα οι επόμενες εκφράσεις μπορούν να αποτελέσουν κατάλληλα μέτρα για να εκφράσουμε την τραχύτητα της τεθλασμένης επιφάνειας κατά τις δύο διευθύνσεις:

$$q_{dx} = \sum_{j_y=0}^{my} \sum_{j_x=1}^{mx-1} (2d_{j_x, j_y} - d_{j_x-1, j_y} - d_{j_x+1, j_y})^2 \quad (4.19)$$

και

$$q_{dy} = \sum_{j_x=0}^{m_x} \sum_{j_y=1}^{m_y-1} (2d_{j_y, j_x} - d_{j_y-1, j_x} - d_{j_y+1, j_x})^2 \quad (4.20)$$

Αν εφαρμόσουμε την σχέση (4.19) για την γενική περίπτωση όπου είναι  $j_x=1, \dots, m_x-1$  και  $j_y=0, 1, 2, \dots, m_y$ , παίρνουμε:

$$\begin{aligned} q_{dx} = & (2d_{1,0} - d_{0,0} - d_{2,0})^2 + (2d_{2,0} - d_{1,0} - d_{3,0})^2 + \dots + (2d_{m_x-1,0} - d_{m_x-2,0} - d_{m_x,0})^2 + \\ & + (2d_{1,1} - d_{0,1} - d_{2,1})^2 + (2d_{2,1} - d_{1,1} - d_{3,1})^2 + \dots + (2d_{m_x-1,1} - d_{m_x-2,1} - d_{m_x,1})^2 + \\ & + \\ & \vdots \\ & + \\ & + (2d_{1,m_y} - d_{0,m_y} - d_{2,m_y})^2 + (2d_{2,m_y} - d_{1,m_y} - d_{3,m_y})^2 + \dots + (2d_{m_x-1,m_y} - d_{m_x-2,m_y} - d_{m_x,m_y})^2 \end{aligned} \quad (4.21)$$

Η οποία εύκολα αναλύεται στο παρακάτω γινόμενο μητρώων:

$$q_{dx} = (\Psi_x \mathbf{d})^T (\Psi_x \mathbf{d}) = q_{dx} = \mathbf{d}^T \Psi_x^T \Psi_x \mathbf{d} \quad (4.22)$$

όπου το μητρώο  $\Psi_x \mathbf{d}$ , με διαστάσεις  $(m-1) \times 1$ , είναι το εξής:

$$\Psi_x \mathbf{d} = \begin{bmatrix} 2d_{1,0} - d_{0,0} - d_{2,0} \\ 2d_{2,0} - d_{1,0} - d_{3,0} \\ \vdots \\ 2d_{m_x-1,0} - d_{m_x-2,0} - d_{m_x,0} \\ \\ 2d_{1,1} - d_{0,1} - d_{2,1} \\ 2d_{2,1} - d_{1,1} - d_{3,1} \\ \vdots \\ 2d_{m_x-1,1} - d_{m_x-2,1} - d_{m_x,1} \\ \\ 2d_{1,m_y} - d_{0,m_y} - d_{2,m_y} \\ 2d_{2,m_y} - d_{1,m_y} - d_{3,m_y} \\ \vdots \\ 2d_{m_x-1,m_y} - d_{m_x-2,m_y} - d_{m_x,m_y} \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Από την (4.23) εύκολα προκύπτει ότι το  $\Psi_x$  είναι μητρώο με διαστάσεις  $(m-1) \times (m+1)$  (για  $i=1, \dots, m-1$  και  $j=0, \dots, m$ ) και με τα στοιχεία του να είναι:

$$\psi_{x,i,j} = \begin{cases} 2, & \text{όταν } i=j \text{ και } i-\kappa(mx+1) \notin \{1, mx+1\} \\ -1, & \text{όταν } |i-j|=1 \text{ και } i-\kappa(mx+1) \notin \{1, mx+1\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.24)$$

όπου  $\kappa = 0, 1, \dots, my$ .

Αν ακολουθήσουμε την ίδια διαδικασία για την εξίσωση (4.20) καταλήγουμε στην παρακάτω εξίσωση, η οποία εκφράζει την τραχύτητα της τεθλασμένης επιφάνειας κατά την διεύθυνση  $y$ :

$$q_{dy} = \mathbf{d}^T \Psi_y^T \Psi_y \mathbf{d} \quad (4.25)$$

όπου το μητρώο  $\Psi_y$  έχει διαστάσεις  $(m-1) \times (m+1)$  (για  $i=1, \dots, m-1$  και  $j=0, \dots, m$ ) με τα στοιχεία του να είναι:

$$\psi_{y,i,j} = \begin{cases} 2, & \text{όταν } i=j \text{ και } i-\kappa(my+1) \notin \{1, my+1\} \\ -1, & \text{όταν } |i-j|=1 \text{ και } i-\kappa(my+1) \notin \{1, my+1\} \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (4.26)$$

όπου  $\kappa = 0, 1, \dots, mx$ . Πρέπει να σημειώσουμε ότι τα μητρώα  $\Psi_x$  και  $\Psi_y$  όταν ισχύει  $mx=my$ , είναι ίδια.

Με την ίδια λογική, τα μέτρα της τραχύτητας της τεθλασμένης επιφάνειας  $e$  κατά τις δύο διευθύνσεις είναι:

$$q_{ex} = \sum_{j_y=0}^{my} \sum_{j_x=1}^{mx-1} (2e_{j_x, j_y} - e_{j_x-1, j_y} - e_{j_x+1, j_y})^2 \quad (4.27)$$

και

$$q_{ey} = \sum_{j_x=0}^{mx} \sum_{j_y=1}^{my-1} (2e_{j_x, j_y} - e_{j_x, j_y-1} - e_{j_x, j_y+1})^2 \quad (4.28)$$

οι οποίες τελικά μπορούν να γραφούν σε μορφή μητρώων ως εξής:

$$q_{ex} = \mathbf{e}^T \Psi_x^T \Psi_x \mathbf{e} \quad (4.29)$$

και

$$q_{ey} = \mathbf{e}^T \Psi_y^T \Psi_y \mathbf{e} \quad (4.30)$$

όπου τα μητρώα  $\Psi_x$  και  $\Psi_y$  ορίστηκαν προηγουμένως στις εξισώσεις (4.24) και (4.26), αντίστοιχα.



#### 4.2.5 Εύρεση και ελαχιστοποίηση της γενικευμένης αντικειμενικής συνάρτησης

Για να είναι η μέθοδος ελεγχόμενη κατά τις διευθύνσεις  $x$  και  $y$ , εισάγαμε διαφορετικούς αδιάστατους πολλαπλασιαστές  $\lambda$  και  $\mu$  για κάθε μία. Έτσι, συνδυάζοντας τις εξισώσεις (4.2), (4.14), (4.22), (4.25), (4.29) και (4.30) και εισάγοντας έναν αδιάστατο πολλαπλασιαστή  $\lambda_x \geq 0$  για το  $q_{dx}$ , έναν  $\lambda_y \geq 0$  για το  $q_{dy}$ , καθώς επίσης έναν  $\mu_x \geq 0$  για το  $q_{ex}$  και έναν  $\mu_y \geq 0$  για το  $q_{ey}$  παίρνουμε την γενικευμένη μορφή της αντικειμενικής συνάρτησης που πρέπει να ελαχιστοποιηθεί:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{d}, \mathbf{e}) &:= p + \lambda_x q_{dx} + \lambda_y q_{dy} + \mu_x q_{ex} + \mu_y q_{ey} = \\ &= \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|^2 + \lambda_x \mathbf{d}^T \Psi_x^T \Psi_x \mathbf{d} + \lambda_y \mathbf{d}^T \Psi_y^T \Psi_y \mathbf{d} + \\ &+ \mu_x \mathbf{e}^T \Psi_x^T \Psi_x \mathbf{e} + \mu_y \mathbf{e}^T \Psi_y^T \Psi_y \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Οι ιδιότητες που προσδίδουν οι πολλαπλασιαστές στην τεθλασμένη επιφάνεια είναι αντίστοιχες με την περίπτωση της μίας διάστασης. Αν είναι ίσοι με μηδέν, τότε η εξίσωση (4.31) θα οδηγήσει στην τεθλασμένη επιφάνεια με το ελάχιστο δυνατό σφάλμα  $p_{\min}$ . Αν είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν, τότε η τεθλασμένη επιφάνεια θα είναι πιο ομαλή και προφανώς το τετραγωνικό σφάλμα  $p$  θα είναι μεγαλύτερο από ότι το  $p_{\min}$ .

Για να ελαχιστοποιήσουμε την εξίσωση (4.31) εφαρμόσαμε τους τυπικούς κανόνες παραγωγίσης μητρώων (Marlow, 1993, σελ. 214). Η διαδικασία είναι παρόμοια με την περίπτωση της μίας διάστασης και είναι η εξής:

Έστω

$$f_1 = \|\mathbf{z} - \hat{\mathbf{z}}\|^2 = \|\mathbf{z} - \mathbf{\Pi} \mathbf{d} - \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e}\|^2 \quad (4.32)$$

Είναι

$$f_1 = [\mathbf{z} - \mathbf{\Pi} \mathbf{d} - \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e}]^T [\mathbf{z} - \mathbf{\Pi} \mathbf{d} - \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e}] \quad (4.33)$$

και τελικά

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathbf{z}^T \mathbf{z} - \mathbf{z}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{d} - \mathbf{z}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} - \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{z} + \\ &+ \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} - \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{z} + \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.34) ως προς το διάνυσμα  $\mathbf{d}$ , έχουμε:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{d}} = -2 \mathbf{z}^T \mathbf{\Pi} + 2 \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{\Pi} \quad (4.35)$$

ενώ παραγωγίζοντας την εξίσωση (4.34) ως προς το διάνυσμα  $\mathbf{e}$ , έχουμε:

$$\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{e}} = -2 \mathbf{z}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + 2 \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + 2 \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \quad (4.36)$$

Αντίστοιχα, για τους όρους των πολλαπλασιαστών  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$  και  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  παραγωγίζοντάς τους παίρνουμε:

$$\frac{\partial(\lambda_x \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} = 2 \lambda_x \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial(\lambda_y \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y \mathbf{d})}{\partial \mathbf{d}} = 2 \lambda_y \mathbf{d}^T \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y \quad (4.38)$$

και

$$\frac{\partial(\mu_x \mathbf{e}^T \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x \mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} = 2 \mu_x \mathbf{e}^T \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial(\mu_y \mathbf{e}^T \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y \mathbf{e})}{\partial \mathbf{e}} = 2 \mu_y \mathbf{e}^T \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y \quad (4.40)$$

Τελικά, μετά από πράξεις καταλήγουμε στο παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^T (\lambda_x \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x + \lambda_y \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y) + \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{\Pi} &= \mathbf{z}^T \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{e}^T (\mu_x \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x + \mu_y \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y) + \mathbf{d}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + \mathbf{e}^T \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} &= \mathbf{z}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \end{aligned} \quad (4.41)$$

το οποίο με αναστροφή των διανυσμάτων  $\mathbf{d}^T$  και  $\mathbf{e}^T$  δίνει την τελική μορφή του συστήματος που η λύση του θα μας δώσει τα διανύσματα  $\mathbf{d}$  και  $\mathbf{e}$  τα οποία ελαχιστοποιούν την εξίσωση (4.31):

$$\begin{aligned} [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + \lambda_x \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x + \lambda_y \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y] \mathbf{d} + \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{e} &= \mathbf{\Pi}^T \mathbf{z} \\ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \mathbf{d} + [\mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + \mu_x \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x + \mu_y \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y] \mathbf{e} &= \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{z} \end{aligned} \quad (4.42)$$

Στην περίπτωση που  $\lambda_x = \lambda_y = \mu_x = \mu_y = 0$ , τότε το σύστημα δεν έχει λύση γιατί οι δύο εξισώσεις συμπίπτουν.

Η λύση του συστήματος προκύπτει μετά από πράξεις και υπό την μορφή μητρώων έχει ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{\Pi} + \lambda_x \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x + \lambda_y \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y & \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} & \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{T} \mathbf{\Pi} + \mu_x \mathbf{\Psi}_x^T \mathbf{\Psi}_x + \mu_y \mathbf{\Psi}_y^T \mathbf{\Psi}_y \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}^T \mathbf{z} \\ \mathbf{\Pi}^T \mathbf{T}^T \mathbf{z} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

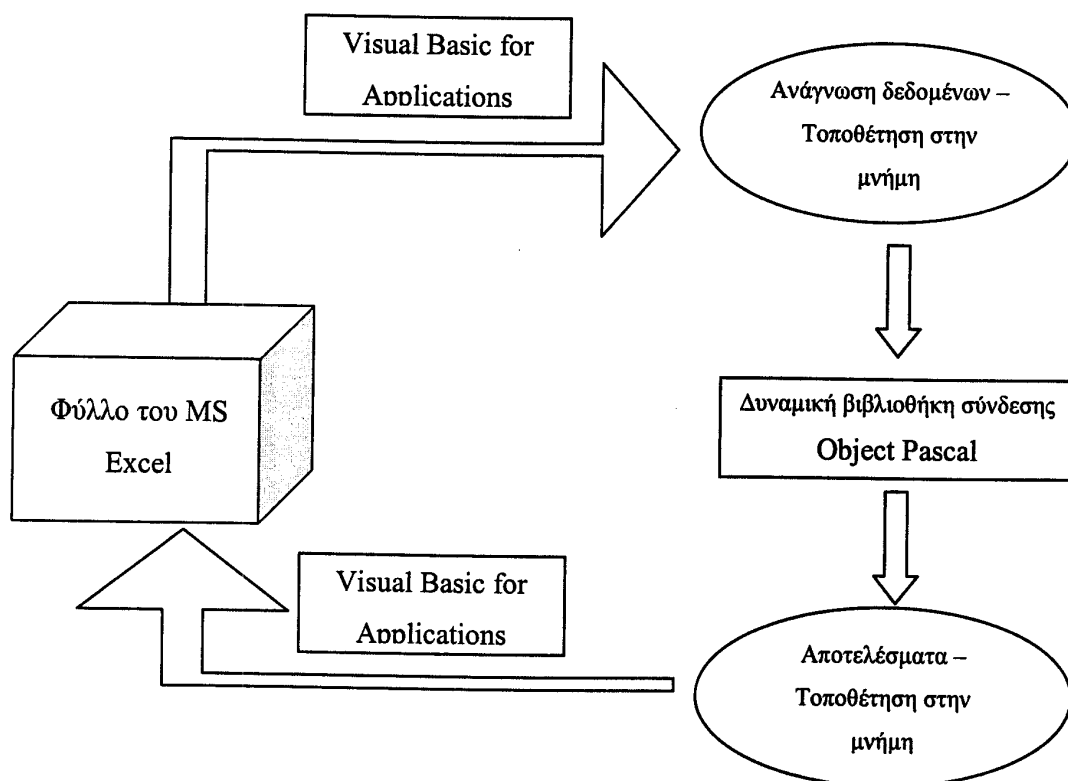
### 4.3 Υλοποίηση της μεθόδου σε υπολογιστικό περιβάλλον

Η προσαρμογή της μεθόδου σε δύο διαστάσεις είχε ως αποτέλεσμα την αύξηση των υπολογιστικών απαιτήσεων της, αφού παραδείγματος χάριν για ανάλυση 10 διαστημάτων κατά  $x$  και 10 κατά  $y$ , τα μητρώα που σχηματίζονται για την επίλυση

του συστήματος των εξισώσεων (4.43) έχουν διαστάσεις  $(2m + 2) \times (2m + 2) = 242 \times 242$ , το καθένα. Το γεγονός αυτό είχε ως αποτέλεσμα την αδυναμία του περιβάλλοντος MS-Excel για Windows, όχι μόνο να επιλύσει το παραπάνω σύστημα αλλά και να μπορέσει να δημιουργήσει σε εύλογο υπολογιστικό χρόνο τα εμπλεκόμενα μητρώα. Πρέπει να σημειωθεί ότι η ενσωματωμένη συνάρτηση μητρώων του MS-Excel 'MINVERSE', η οποία χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση της μίας διάστασης, δεν μπορεί να αντιστρέψει μητρώα με διαστάσεις μεγαλύτερες από  $52 \times 52$ .

Για το λόγο αυτό επιλέχθηκε για την ανάπτυξη της μεθόδου η γλώσσα προγραμματισμού Object Pascal, η οποία είναι υπολογιστικά πολύ πιο ισχυρή, από την ενσωματωμένη γλώσσα προγραμματισμού του MS-Excel, Visual Basic for Applications.

Επειδή όμως η ανάπτυξη μιας αυτόνομης εφαρμογής με γραφικό περιβάλλον εργασίας (graphic user interface) για την μέθοδο θα ήταν πολύπλοκη και χρονοβόρα, επιλέχθηκε το να δημιουργηθεί μια βιβλιοθήκη δυναμικής σύνδεσης (dynamic link library), η οποία θα περιείχε την ανάπτυξη της μεθόδου σε γλώσσα Object Pascal και θα συνδυαζόταν με το γραφικό περιβάλλον του MS-Excel. Έτσι, σε μια λειτουργική μονάδα του MS-Excel δημιουργήθηκε ο κώδικας που απαιτείται για την ανάγνωση των δεδομένων από ένα φύλλο του MS-Excel, την αποστολή τους στην δυναμική βιβλιοθήκη (dll) της Object Pascal, καθώς και την λήψη και εκτύπωση των αποτελεσμάτων στο ίδιο φύλλο. Η μέθοδος καλείται με τον κλασικό τρόπο που καλούνται οι συναρτήσεις μητρώων (array formulas) του MS-Excel. Παραστατικά η ανωτέρω διαδικασία παρουσιάζεται στο Σχήμα 4-3.



Σχήμα 4-3: Σχηματική παράσταση της υλοποίησης της μεθόδου σε υπολογιστικό περιβάλλον

Για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (4.43) χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος της διάσπασης σε άνω και κάτω τριγωνικό μητρώο, γνωστή ως LU Decomposition (Press et al., 1992). Σε αυτή την μέθοδο, και στην γενική περίπτωση, αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να γράψουμε το μητρώο  $A$  ως γινόμενο δύο μητρώων:

$$\mathbf{L U} = \mathbf{A} \quad (4.44)$$

όπου  $\mathbf{L}$  είναι κάτω τριγωνικό μητρώο, δηλαδή έχει στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιο και κάτω και  $\mathbf{U}$  είναι πάνω τριγωνικό μητρώο, δηλαδή έχει στοιχεία μόνο στην κύρια διαγώνιο και πάνω. Με τον τρόπο αυτό, θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε αυτήν τη διάσπαση για να λύσουμε το γραμμικό σύστημα:

$$\mathbf{A x} = (\mathbf{L U}) \mathbf{x} = \mathbf{L (U x)} = \mathbf{b} \quad (4.45)$$

με το να υπολογίσουμε ένα διάνυσμα  $\mathbf{y}$ , τέτοιο ώστε:

$$\mathbf{L y} = \mathbf{b} \quad (4.46)$$

και στην συνέχεια με το να επιλύσουμε το σύστημα:

$$\mathbf{U x} = \mathbf{y} \quad (4.47)$$

Το πλεονέκτημα της μεθόδου είναι ότι η επίλυση του τριγωνικού συστήματος εξισώσεων (4.47) είναι αρκετά απλή (Press et al., 1992), εξοικονομώντας με αυτό τον τρόπο χρόνο και ελαττώνοντας τις υπολογιστικές απαιτήσεις της μεθόδου.

Τα δεδομένα που απαιτούνται για την εφαρμογή της μεθόδου είναι:

1. Οι τιμές της βροχόπτωσης σε σημεία των οποίων γνωρίζουμε και τις συντεταγμένες τους.
2. Οι τιμές του υψομέτρου σε όσο γίνεται μεγαλύτερο αριθμό σημείων με γνωστές συντεταγμένες, τα οποία θα αποτελέσουν τον πυκνό κάνναβο της μεταβλητής  $t$ .
3. Οι συντεταγμένες των σημείων στα οποία θέλουμε να υπολογίσουμε την τιμή της βροχόπτωσης, καθώς και το υψόμετρό τους.

#### 4.4 Εφαρμογή της μεθόδου

Ως πεδίο εφαρμογής επιλέχθηκε η Στερεά Ελλάδα (Σχήμα 4-4), με σκοπό την παραγωγή του βροχομετρικού χάρτη της περιοχής, αλλά και την σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου με αυτά της μεθόδου της αντίστροφης απόστασης (Inverse Distance Weight – IDW).

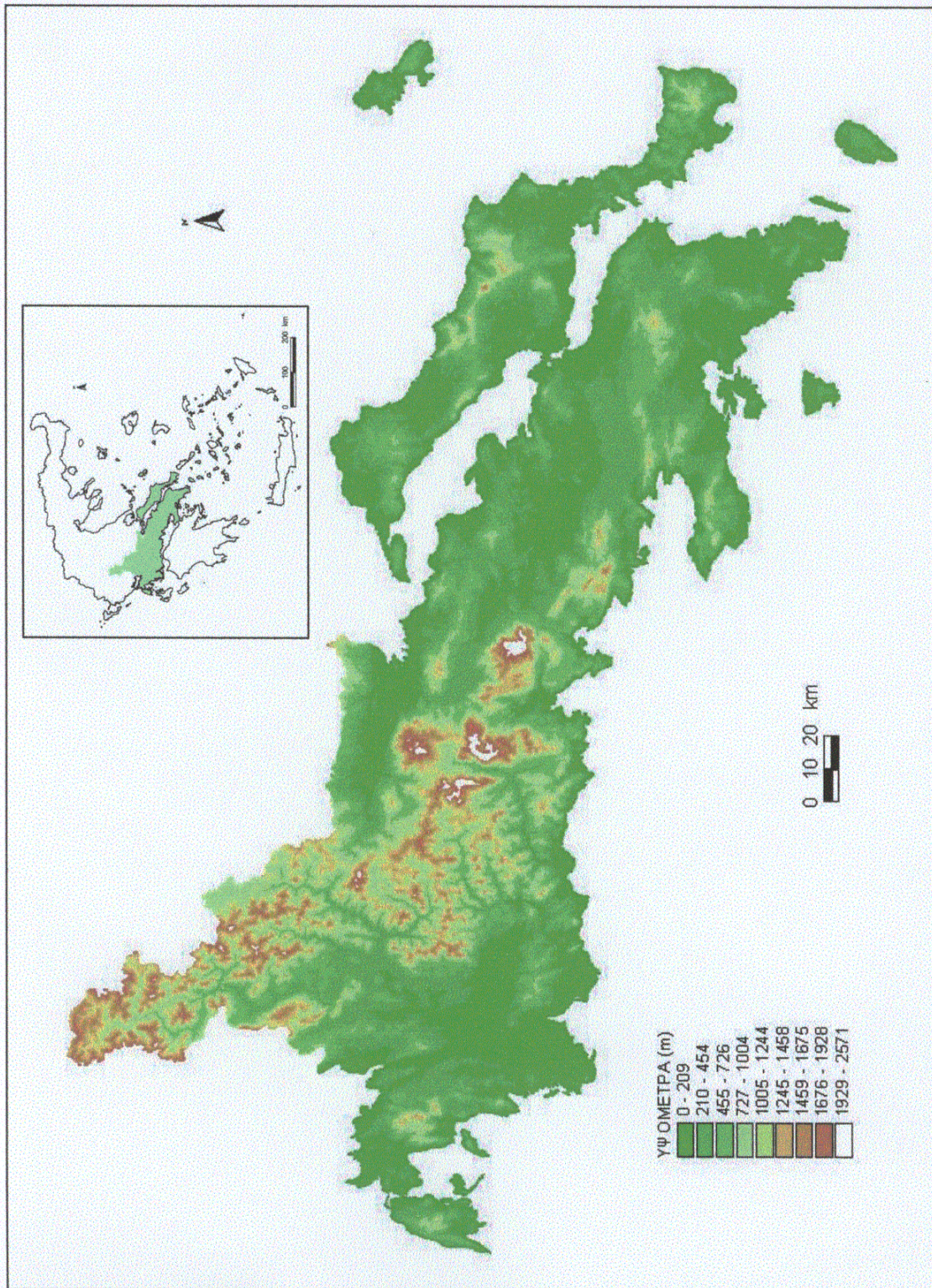
##### 4.4.1 Δεδομένα

Τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν για την εφαρμογή της μεθόδου είναι βροχομετρικά και γεωγραφικά.

Σαν βροχομετρικά δεδομένα χρησιμοποιήθηκαν οι μέσες βροχοπτώσεις των 71 βροχομετρικών σταθμών που βρίσκονται στην Στερεά Ελλάδα (Σχήμα 4-5), οι οποίες ελήφθησαν από το ερευνητικό έργο “Εκτίμηση και διαχείριση των υδατικών πόρων της Στερεάς Ελλάδας”, (Χριστοφίδης και Μαμάσης, 1995). Στην κατηγορία των γεωγραφικών δεδομένων συμπεριλαμβάνονται και οι θέσεις των βροχομετρικών σταθμών στο Ελληνικό Γεωδαιτικό Σύστημα Αναφοράς (Ε.Γ.Σ.Α. '87) και το υψόμετρό τους.

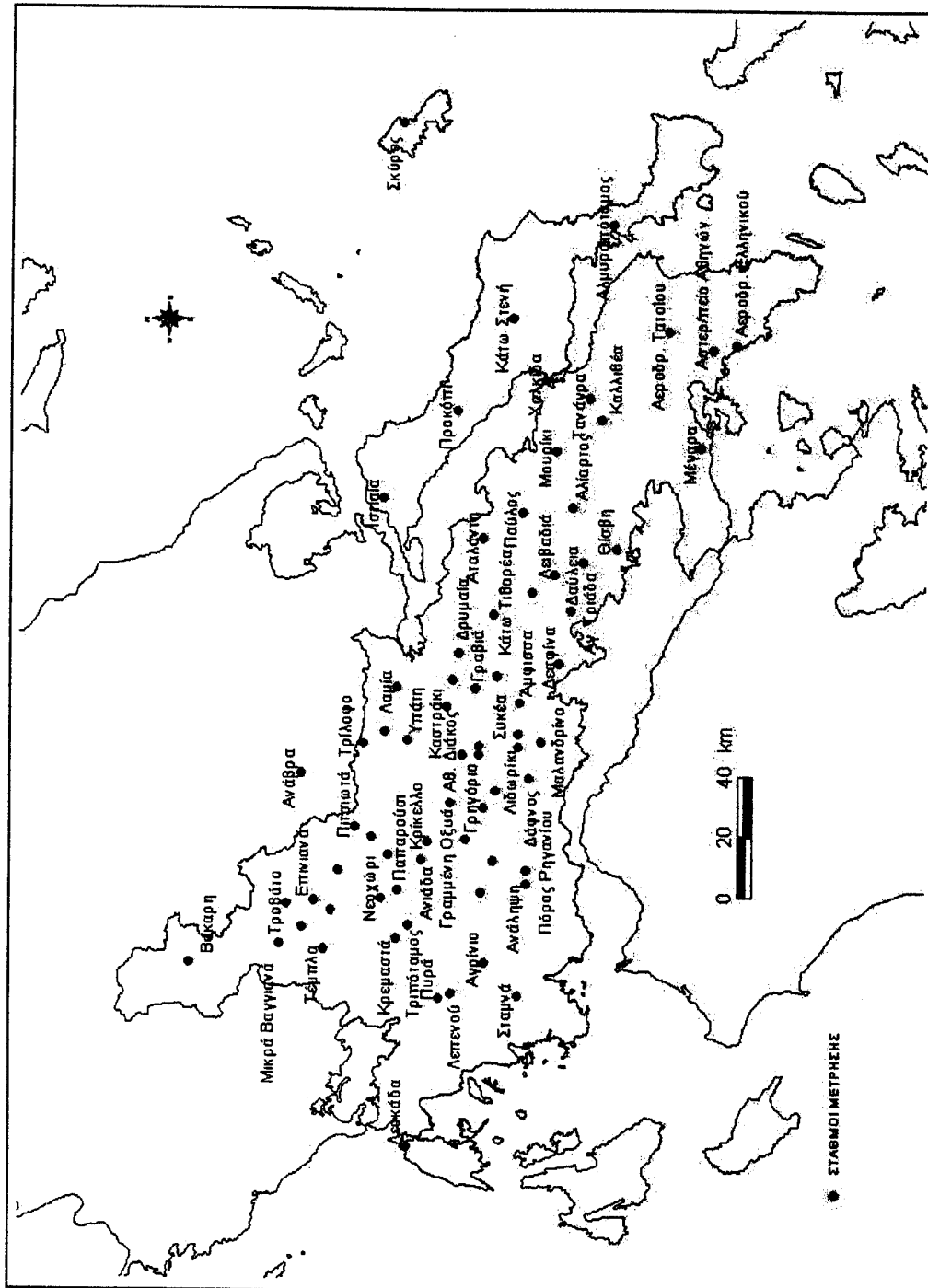
Για να αποκτήσουμε το σύνολο γνωστών σημείων υψομέτρου εφαρμόσαμε έναν κάνναβο με μέγεθος κελιού  $2 \text{ km} \times 2 \text{ km}$ , πάνω σε ολόκληρη την περιοχή μελέτης, με αποτέλεσμα την παραγωγή 6218 σημείων γνωστού υψομέτρου, τα οποία χρησιμοποιήθηκαν ως πυκνός κάνναβος της μεταβλητής  $t$ . Η υψομετρική πληροφορία





Σχήμα 4-4: Υψομετρικός χάρτης της Στερεάς Ελλάδας και η θέση της σε σχέση με τον υπόλοιπο Ελλαδικό χώρο





Σχήμα 4-5: Θέσεις των 71 βροχομετρικών σταθμών της Στερεάς Ελλάδας

προήλθε από επεξεργασία τοπογραφικών και υδρολογικών δεδομένων, η οποία υλοποιήθηκε στα πλαίσια του πιο πάνω ερευνητικού προγράμματος του Τομέα Υδατικών Πόρων, Υδραυλικών και Θαλάσσιων Έργων. Το μέγεθος του κελιού επιλέχθηκε με κριτήριο την πρακτική εφαρμογή και κρίθηκε ικανό για να αναπαραστήσει την μεταβολή του υψομέτρου, της υπό εξέταση περιοχής.

Τα παραπάνω στοιχεία παρατίθενται στο Παράρτημα 2.

#### 4.4.2 Σύγκριση της μεθόδου με την μέθοδο της αντίστροφης απόστασης

Ως μέθοδο σύγκρισης και επαλήθευσης της μεθόδου εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη επιφάνεια (BSS), χρησιμοποιήσαμε μια ευρέως διαδεδομένη μέθοδο, την μέθοδο της αντίστροφης απόστασης (Inverse Distance Weight – IDW, Tabios and Salas, 1985).

Για το σκοπό αυτό ξεχωρίσαμε 21 από τους 71 βροχομετρικούς σταθμούς της περιοχής μελέτης (βλέπε Πίνακα 4-1) τους οποίους χρησιμοποιήσαμε ως θέσεις ελέγχου. Δηλαδή υπολογίσαμε την τιμή της βροχόπτωσης σε αυτούς και με τις δύο μεθόδους, θεωρώντας ως σημεία με γνωστή βροχόπτωση τους υπόλοιπους 50 σταθμούς και συγκρίναμε τις υπολογισμένες τιμές με τις πραγματικές.

Η μέθοδος IDW εφαρμόστηκε με χρήση των αναλυτικών σχέσεων που υπάρχουν στην βιβλιογραφία, λαμβάνοντας υπόψη την επιρροή και των 50 γνωστών σημείων για την εκτίμηση του καθενός αγνώστου.

Η μέθοδος εξομάλυνσης εφαρμόστηκε για τις τιμές των πολλαπλασιαστών  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  που έδιναν το μικρότερο δυνατό μέσο τετραγωνικό σφάλμα στους 21 σταθμούς, σε συνδυασμό με ομαλή επιφάνεια, οι οποίες ήταν  $\lambda_x = 1.53 \cdot 10^{-4}$ ,  $\lambda_y = 1.46 \cdot 10^{-3}$ ,  $\mu_x = 2.5 \cdot 10^6$ ,  $\mu_y = 8.7 \cdot 10^4$ . Πρέπει να τονιστεί ότι η χρήση μικρών τιμών των πολλαπλασιαστών, είχε ως αποτέλεσμα μικρό σφάλμα στα 50 γνωστά σημεία, αλλά αυξημένη τραχύτητα της τεθλασμένης επιφάνειας και κατ' επέκταση μεγάλες διακυμάνσεις στις τιμές της βροχόπτωσης στους υπόλοιπους 21 σταθμούς. Έτσι, επιλέχθηκαν τέτοιες τιμές που είχαν ως αποτέλεσμα μεγαλύτερο σφάλμα αλλά πιο ομαλή αλληλουχία τιμών.

Ο αριθμός των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε η περιοχή μελέτης ήταν 8 κατά την διεύθυνση  $x$  (mx) και 4 κατά την διεύθυνση  $y$  (my). Το γεγονός αυτό αποδεικνύει την ικανότητα της μεθόδου να δίνει πολύ ικανοποιητικά αποτελέσματα με μικρή ανάλυση και κατ' επέκταση μικρές υπολογιστικές απαιτήσεις, αφού τα μητρώα που σχηματίστηκαν για την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (4.43) είχαν

διαστάσεις  $(2m + 2) \times (2m + 2) = 90 \times 90$ . Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτήθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ήταν 0.1 sec, από το οποίο το 50 % απαιτήθηκε από το MS-Excel για την ανάγνωση των δεδομένων και την εκτύπωση των αποτελεσμάτων, ενώ η δημιουργία των εμπλεκόμενων μητρώων, η επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (4.43) και η εύρεση των αποτελεσμάτων από την βιβλιοθήκη δυναμικής σύνδεσης αποτέλεσε το υπόλοιπο.

Τα αποτελέσματα των δύο μεθόδων παρουσιάζονται στον Πίνακα 4-1, με γραμμοσκιασμένα τα πλησιέστερα στις μετρήσεις.

Πίνακας 4-1: Αποτελέσματα των δύο μεθόδων για τους 21 σταθμούς της Στερεάς Ελλάδας

α/α	Όνομα σταθμού	Υψόμετρο σταθμού	Μετρήσεις βροχόπτωσης	Εκτιμήσεις από BSS	Εκτιμήσεις από IDW
1	Αγ. Βλάσιος	283	1147,7	824,9	832,2
2	Αγρίνιο	45	968	977,5	1182,4
3	Βακάριο	1159	1655,9	1645,4	1464,5
4	Γραμμένη Οξυά	1155	1184,5	1380,6	1314,4
5	Δάφνος	506	1047,8	1015,8	1138,3
6	Καρούτες	1586	1285,1	960,1	990,2
7	Καστράκι	785	1120,9	1039,8	1019,3
8	Πλάτανος	1190	1501,3	1100,8	1282,0
9	Πόρος Ρηγανίου	540	1268,1	1261,9	1236,4
10	Πυρά	428	1343,9	1263,4	1134,6
11	Τέμπλα	321	1301	1163,5	1418,5
12	Τροβάτο	1207	1852,6	1897,5	1486,0
13	Αστεροσκοπείο Αθηνών	36	389,6	455,1	448,5
14	Μουρίκι	85	435,1	574,9	656,7
15	Γραβιά	863	952,2	989,4	1004,6
16	Δεσφίνα	557	365,5	743,9	945,7
17	Ζηλευτό	123	522	791,1	875,6
18	Κάτω Στενή	313	1041,1	1039,9	662,7
19	Τιθορέα	153	658,2	846,7	896,1
20	Λειβαδιά	213	494,1	703,8	735,0
21	Νεοχώρι	881	1257	1327,7	1481,0

Το σχετικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα στην περίπτωση της τεθλασμένης (BSS) ήταν 18%, ενώ στην περίπτωση της IDW ήταν 25%, πράγμα που αποδεικνύει ότι η μέθοδος BSS δίνει καλύτερα αποτελέσματα. Εκτός όμως από το μέγεθος του σφάλματος που είναι μικρότερο, η BSS έδωσε καλύτερες εκτιμήσεις σε 15 από τους 21 σταθμούς, από την IDW η οποία έδωσε καλύτερες εκτιμήσεις μόνο σε 6.

#### 4.4.3 Δημιουργία του βροχομετρικού χάρτη της Στερεάς Ελλάδας

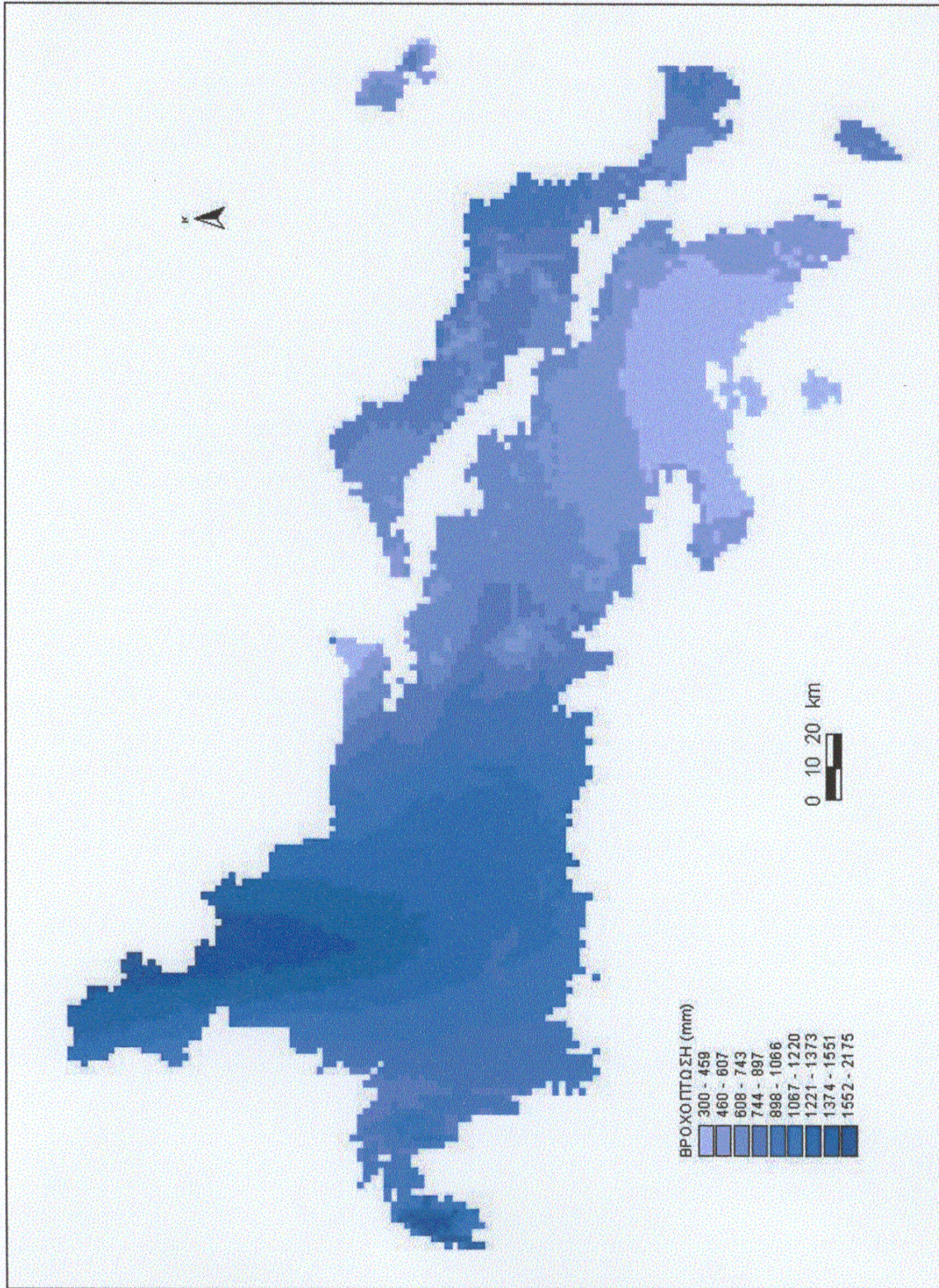
Με σκοπό την δημιουργία του βροχομετρικού χάρτη της Στερεάς Ελλάδας, υπολογίσαμε την μέση βροχόπτωση σε όλα τα σημεία γνωστού υψομέτρου, δηλαδή και στα 6218, και στην συνέχεια με την εισαγωγή των αποτελεσμάτων της μεθόδου στο Σύστημα Γεωγραφικών Πληροφοριών ARCVIEW πήραμε το τελικό αποτέλεσμα το οποίο παρουσιάζεται στο Σχήμα 4-6.

Για λόγους σύγκρισης χρησιμοποιήθηκε η ενσωματωμένη στο Σύστημα Γεωγραφικών Πληροφοριών ARCVIEW, μέθοδος της αντίστροφης απόστασης (IDW), για την παραγωγή του αντίστοιχου χάρτη (Σχήμα 4-7). Για την εφαρμογή της θεωρήσαμε ότι για τον υπολογισμό της βροχόπτωσης στο τυχαίο σημείο θα πρέπει να λαμβάνονται υπόψη οι τιμές της βροχόπτωσης στους 12 κοντινότερους σταθμούς.

Η μέθοδος εξομάλυνσης εφαρμόστηκε για τις τιμές των πολλαπλασιαστών  $\lambda_x$ ,  $\lambda_y$ ,  $\mu_x$ ,  $\mu_y$  που έδιναν το μικρότερο δυνατό μέσο τετραγωνικό σφάλμα στους 71 σταθμούς, σε συνδυασμό με ομαλή επιφάνεια, οι οποίες ήταν  $\lambda_x = 4 \cdot 10^{-2}$ ,  $\lambda_y = 4 \cdot 10^{-2}$ ,  $\mu_x = 1 \cdot 10^7$ ,  $\mu_y = 2 \cdot 10^5$ , οι οποίες είναι διαφορετικές από αυτές του προηγούμενου παραδείγματος λόγω του ότι έχουν συμπεριληφθεί και οι υπόλοιποι 21 σταθμοί. Ο αριθμός των τμημάτων στα οποία χωρίστηκε η περιοχή μελέτης ήταν 8 κατά την διεύθυνση  $x$  ( $m_x$ ) και 4 κατά την διεύθυνση  $y$  ( $m_y$ ). Το σχετικό μέσο τετραγωνικό σφάλμα στις θέσεις των σταθμών ήταν 5%. Ο υπολογιστικός χρόνος που απαιτήθηκε για την εφαρμογή της μεθόδου, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, ήταν 36.4 sec, από τα οποία μόνο τα 0.2 sec απαιτήθηκαν από την βιβλιοθήκη δυναμικής σύνδεσης για την δημιουργία των εμπλεκόμενων μητρώων, την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων (4.43) και την εύρεση των αποτελεσμάτων. Τα υπόλοιπα 36.2 sec απαιτήθηκαν από το MS-Excel για την ανάγνωση των δεδομένων και την εκτύπωση των αποτελεσμάτων.

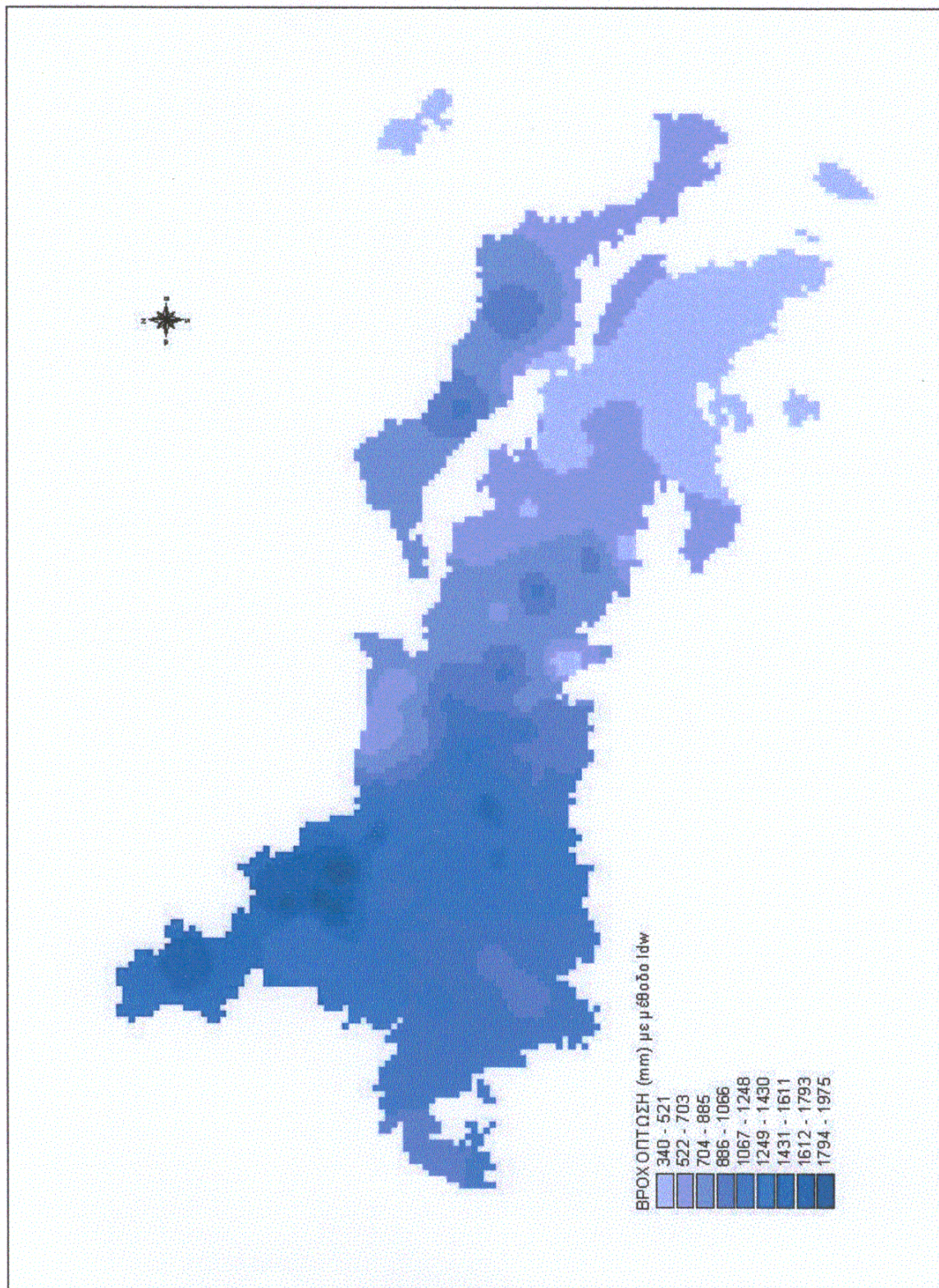
Από το Σχήμα 4-6 είναι προφανές ότι τα αποτελέσματα της μεθόδου ακολουθούν πλήρως την υπόθεση της εξάρτησης της τιμής της βροχόπτωσης από το





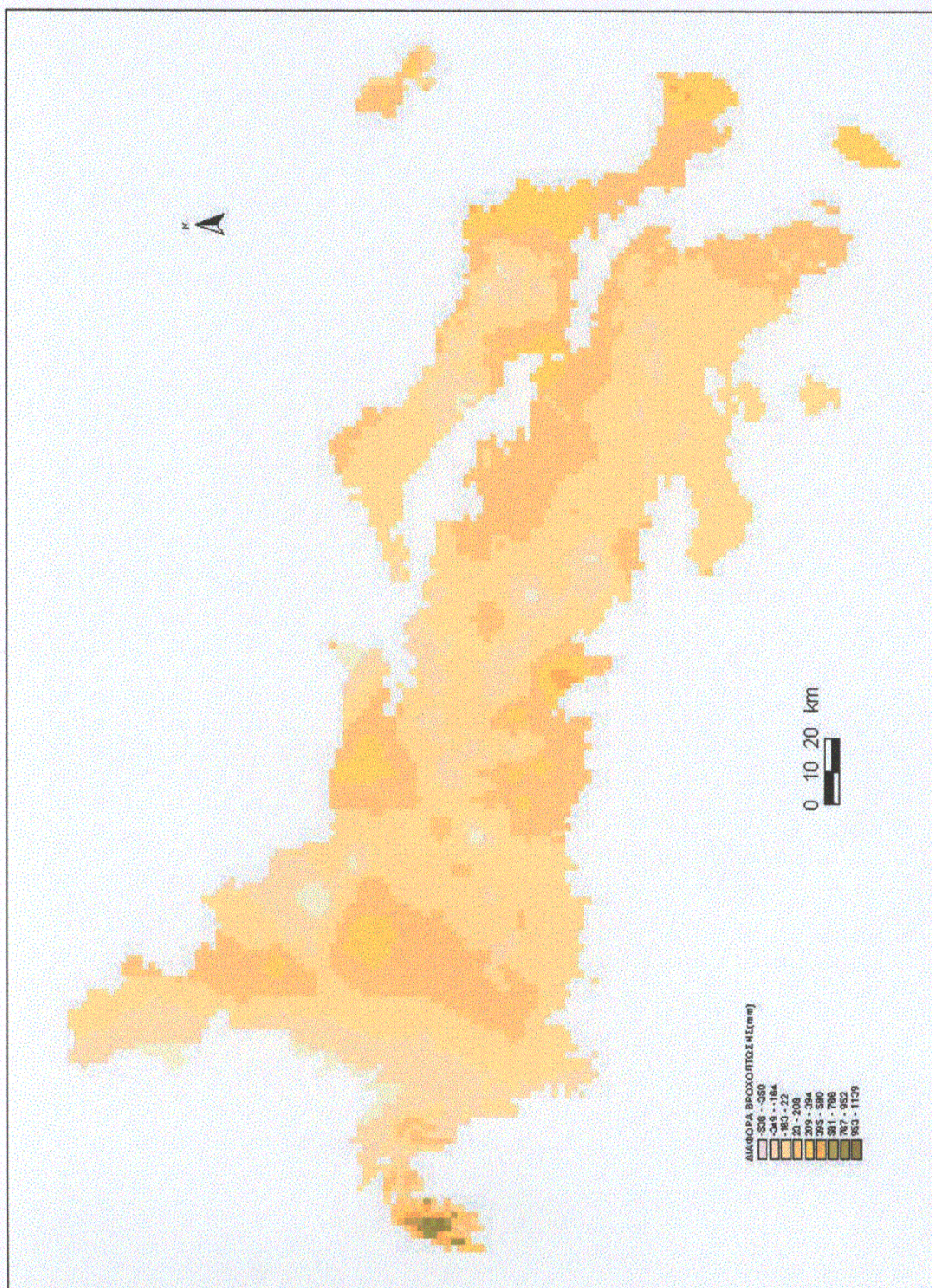
Σχήμα 4-6: Βροχομετρικός χάρτης της Στερεάς Ελλάδας, με βάση τα αποτελέσματα της μεθόδου εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη επιφάνεια





Σχήμα 4-7: Βροχομετρικός χάρτης της Στερεάς Ελλάδας, με βάση τα αποτελέσματα της μεθόδου της αντίστροφης απόστασης (IDW)





Σχήμα 4-8: Αφαίρεση των αποτελεσμάτων της μεθόδου της αντίστροφης απόστασης από αυτά της μεθόδου εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη επιφάνεια



υψόμετρο, ενώ συγχρόνως διατηρείται η συσχέτιση των αποτελεσμάτων με τις μετρήσεις των σταθμών. Αυτό σημαίνει ότι αν υπάρχουν περιοχές με μεγαλύτερο ή μικρότερο υψόμετρο κοντά σε ένα βροχομετρικό σταθμό τότε η μέθοδος εξομάλυνσης θα δώσει στα συγκεκριμένα σημεία υψηλότερη ή χαμηλότερη βροχόπτωση αντίστοιχα. Χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η περιοχή της Λευκάδας, όπου ο σταθμός μέτρησης βρίσκεται στο επίπεδο της θάλασσας (υψόμετρο 0 m) ενώ η μέση ετήσια βροχόπτωση είναι 976.9 mm. Τα υψόμετρα που υπάρχουν στην Λευκάδα φτάνουν μέχρι τα 1035 m, σημείο στο οποίο η BSS έδωσε τιμή βροχόπτωσης, 1975 mm. Το αποτέλεσμα αυτό είναι απολύτως λογικό αφού ακολουθεί την φυσική μεταβολή του φαινομένου της βροχόπτωσης. Από την άλλη μεριά, η μέθοδος της αντίστροφης απόστασης (Σχήμα 4-7), έχει δώσει μια μέση βροχόπτωση που κυμαίνεται μέσα στα όρια των 704 μέχρι 885 mm, στην οποία συμπεριλαμβάνεται και η περιοχή με το παραπάνω υψόμετρο, ενώ στα νότια του νησιού, που σημειωτέον συναντάμε μικρότερα υψόμετρα, δίνει αποτελέσματα που κυμαίνονται μέσα στα όρια των 886 ως 1066 mm.

Για να αποκτήσουμε ακόμη ένα κριτήριο σύγκρισης των δύο μεθόδων αφαιρέσαμε από τα αποτελέσματά της μεθόδου εξομάλυνσης αυτά της μεθόδου της αντίστροφης απόστασης (Σχήμα 4-8). Από το σχήμα είναι προφανές ότι η μέθοδος εξομάλυνσης γενικά δίνει μεγαλύτερες τιμές από την IDW και ειδικότερα στις περιοχές που έχουμε μεγάλα υψόμετρα με τους βροχομετρικούς σταθμούς να βρίσκονται σε μικρά.

Σημασία πρέπει να δοθεί στην γενική εικόνα που δίνουν οι δύο μέθοδοι. Από την μία μεριά έχουμε αποτελέσματα τα οποία συμβαδίζουν με την ορογραφία της περιοχής μελέτης ενώ παράλληλα εμφανίζουν σημαντική κανονικότητα, ενώ από την άλλη έχουμε αποτελέσματα που εμφανίζουν ανωμαλίες, ασυνέχειες και στο σύνολό τους δεν μπορούν να πείσουν ότι μπορούν να αναπαραστήσουν την μεταβολή της βροχόπτωσης σε ολόκληρη την Στερεά Ελλάδα.

## ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

### 5.1 Γενικά

Στην παρούσα εργασία αναπτύχθηκε μια μεθοδολογία παρεμβολής ή/ και εξομάλυνσης σε δεδομένα, που στην προκειμένη περίπτωση αφορούσαν υδρομετεωρολογικές μεταβλητές και συγκεκριμένα τη βροχόπτωση.

Η προτεινόμενη μέθοδος βασίστηκε στην απλή μέθοδο εξομάλυνσης με τεθλασμένη γραμμή και επιτεύχθηκε με την παραδοχή ότι η βροχόπτωση σε οποιαδήποτε θέση μπορεί να εκφραστεί ως μία γραμμική σχέση του υψομέτρου. Οι συντελεστές αυτής της γραμμικής σχέσης μεταβάλλονται και η μεταβολή τους, εκφράζεται από δύο τεθλασμένες γραμμές ή από δύο επιφάνειες δευτέρου βαθμού σε μία και σε δύο διαστάσεις αντίστοιχα.

Για κάθε μία τεθλασμένη γραμμή ή επιφάνεια αντιστοιχίσαμε και έναν παράγοντα εξομάλυνσης. Και οι δύο παράγοντες μπορούν να ρυθμιστούν κατάλληλα έτσι ώστε τα αποτελέσματα της μεθόδου να έχουν χαρακτήρα παρεμβολής ή εξομάλυνσης ανάλογα με το πρόβλημα που αντιμετωπίζουμε. Ειδικότερα, για την περίπτωση των δύο διαστάσεων αυξήσαμε τους δύο παράγοντες σε τέσσερις, για να ελέγχουμε την εξομάλυνση των τεθλασμένων επιφανειών σε κάθε μία διάσταση χωριστά. Μικρές τιμές των παραγόντων έχουν ως συνέπεια μεγάλη τραχύτητα της τεθλασμένης γραμμής ή επιφάνειας με μικρό σφάλμα στα δεδομένα σημεία, ενώ μεγάλες τιμές έχουν το αντίθετο αποτέλεσμα.

Γενικά, οι τεχνικές διπλής τεθλασμένης εξομάλυνσης είναι κατάλληλες για την εξομάλυνση μετρήσεων ή για παρεμβολή μεταξύ των δεδομένων σημείων, ανάλογα με τα βάρη των παραμέτρων εξομάλυνσης και τα αποτελέσματά τους μπορούν να αντικατοπτρίσουν μεταβολές φυσικών φαινομένων, τα οποία διέπονται από πολύπλοκους νόμους. Σε αυτό το πλαίσιο μπορούν να αντικαταστήσουν μεθόδους όπως οι κυβικές splines εξομάλυνσης (cubic smoothing splines) και η γραμμική παλινδρόμηση με βάρη. Η μεθοδολογία της τεθλασμένης εξομάλυνσης σχετίζεται με αυτή των splines, αλλά η κύρια διαφορά τους βρίσκεται στην απλούστερη

αυτή των splines, αλλά η κύρια διαφορά τους βρίσκεται στην απλούστερη μαθηματική έκφρασή της, μιας και συνίσταται από μια ακολουθία ευθύγραμμων τμημάτων στην περίπτωση της μίας διάστασης, ενώ στις δύο από μία ακολουθία επιφανειών δευτέρου βαθμού. Επίσης σχετίζεται και με την τεθλασμένα γραμμική παλινδρόμηση, με κύρια διαφορά τον έλεγχο της συνολικής τραχύτητας της τεθλασμένης μέσω των δύο παραγόντων εξομάλυνσης. Στην περίπτωση της μίας διάστασης έχουμε τρεις παραμέτρους που ρυθμίζονται οι οποίοι είναι: το βάρος των δύο όρων εξομάλυνσης και ο αριθμός των ευθύγραμμων τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής. Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων ο αριθμός των παραμέτρων είναι διπλάσιος αφού προστέθηκαν δύο όροι εξομάλυνσης και ο αριθμός των τμημάτων της τεθλασμένης γραμμής κατά την δεύτερη διάσταση. Τα παραπάνω καθιστούν την μέθοδο πλήρως παραμετρική και ευέλικτη κάνοντάς την κατάλληλη στην ανάλυση διάφορων φυσικών προβλημάτων.

Μια σημαντική ιδιότητα των τεχνικών τεθλασμένης εξομάλυνσης, είναι το γεγονός ότι η ανάλυση, δηλαδή το μήκος των τμημάτων της τεθλασμένης είτε στην μία διάσταση είτε στις δύο, δεν είναι απαραίτητο να συμπίπτει με αυτό των δεδομένων σημείων, αλλά μπορεί να είναι μικρότερο ή μεγαλύτερο ανάλογα με το πρόβλημα. Η δυνατότητα επιλογής της ανάλυσης αποτελεί πλεονέκτημα σε περιπτώσεις που τα δεδομένα είναι πάρα πολλά ή πολύ λίγα, ή δεν είναι ομοιόμορφα κατανομημένα. Πρέπει να τονιστεί ότι η μέθοδος για μικρές αναλύσεις (δηλαδή μικρές υπολογιστικές απαιτήσεις), έδωσε πολύ καλά αποτελέσματα σε σχέση με τις μεγάλες αναλύσεις.

Με σκοπό την ολοκληρωμένη υλοποίηση της μεθοδολογίας, εκτός από το μαθηματικό υπόβαθρο αναπτύχθηκαν δύο εφαρμογές της σε λογισμικό, οι οποίες χρησιμοποιούνται σαν συναρτήσεις του περιβάλλοντος εργασίας MS-Excel. Η πρώτη αφορούσε την μία διάσταση όπου ο αντίστοιχος κώδικας λογισμικού γράφτηκε σε γλώσσα Visual Basic for Applications, ενώ για τις δύο διαστάσεις δημιουργήθηκε μία διττή εφαρμογή αποτελούμενη από ένα τμήμα σε γλώσσα Visual Basic και ένα άλλο σε γλώσσα Object Pascal, λόγω των αυξημένων υπολογιστικών απαιτήσεων της μεθόδου.

Η σύγκριση με την απλή μέθοδο εξομάλυνσης έδειξε μια σαφή υπεροχή της μεθόδου εξομάλυνσης με διπλή τεθλασμένη έναντι της απλής μεθόδου, ειδικά όταν χρησιμοποιούμε μικρές αναλύσεις. Οι μεγαλύτερες διαφορές των δύο μεθόδων παρουσιάστηκαν στα σημεία που είχαμε σημαντικές μεταβολές της παραμέτρου  $t$ .

Η μέθοδος εφαρμόστηκε στη μία αλλά και στις δύο διαστάσεις για τον υπολογισμό της μέσης ετήσιας βροχόπτωσης στην περιοχή της Στερεάς Ελλάδας. Οι εφαρμογές επιβεβαίωσαν την δυνατότητα της μεθόδου να παράγει αξιόπιστα αποτελέσματα. Πρέπει να τονίσουμε την ικανότητά της μεθόδου να λαμβάνει υπόψη την υψομετρική πληροφορία, δεδομένου ότι σε πολλές περιπτώσεις οι υδρολογικές και μετεωρολογικές υπηρεσίες προτιμούν να τοποθετούν τους σταθμούς μέτρησης στις πιο εύκολα προσπελάσιμες πεδινές περιοχές, αφήνοντας ακάλυπτες τις δυσπρόσιτες ορεινές περιοχές. Αυτό το χαρακτηριστικό είναι πολύ σημαντικό μιας και επιτρέπει την αποφυγή της υποεκτίμηση του ύψους βροχής.

## 5.2 Μελλοντική έρευνα

Το σημείο στο οποίο θα μπορούσε να γίνει περαιτέρω διερεύνηση είναι η αδιαστατοποίηση (τυποποίηση) των τιμών των δύο παραμέτρων εξομάλυνσης της μίας διάστασης και των τεσσάρων των δύο διαστάσεων, στο διάστημα  $[0, 1]$ . Επίσης έχει νόημα η διερεύνηση της δυνατότητας του αντικειμενικού προσδιορισμού των παραμέτρων αυτών με χρήση της λεγόμενης *generalized cross - validation (GCV)*, κατά ανάλογο τρόπο με αυτόν του Κεφαλαίου 3.

Επίσης θα μπορούσε να γίνει σύγκριση των αποτελεσμάτων της μεθόδου με τις γεωστατιστικές μεθόδους, δηλαδή τις διάφορες παραλλαγές της μεθόδου της βέλτιστης παρεμβολής (*kriging*), και που σύμφωνα με την βιβλιογραφία δίνουν καλύτερα αποτελέσματα από την μέθοδο της αντίστροφης απόστασης. Σκοπός της σύγκρισης θα πρέπει να είναι η εύρεση του μεγέθους των αποκλίσεων των δύο μεθόδων και αν αυτό δικαιολογεί την επιλογή της μίας ή της άλλης στην ανάλυση κάποιου φυσικού προβλήματος.

Όσον αφορά το υπολογιστικό κομμάτι της μεθοδολογίας, σημαντική βελτίωση θα μπορούσε να αποτελέσει η πλήρης ενσωμάτωσή της σε ένα ολοκληρωμένο σύστημα γεωγραφικής πληροφορίας, όπως το *ARCVIEW*, με στόχο την εύκολη δημιουργία ψηφιακών χαρτών, πράγμα που θα είχε ως άμεσο αποτέλεσμα την ευρύτερη διάδοσή της μεθόδου, ιδέα που θα πρέπει να αποτελεί κύριο σκοπό μιας τόσο εφαρμοσμένης εργασίας.

Η παρούσα εργασία επικεντρώθηκε κυρίως στην ανάπτυξη της μεθοδολογίας και στην υλοποίησή της σε υπολογιστικό περιβάλλον και λιγότερο στην εφαρμογή της. Θα είχε επομένως νόημα μια μελλοντική εκτεταμένη διερεύνηση της μεθόδου μέσω ποικίλων υδρολογικών εφαρμογών. Στα πλαίσια αυτά θα μπορούσε να διερευνηθεί κατ' αρχήν η βροχόπτωση, όχι μόνο στην υπερετήσια κλίμακα που εξετάστηκε εδώ, αλλά σε ετήσια, μηνιαία ή ενδεχομένως σε λεπτότερη κλίμακα. Άλλες υδρομετεωρολογικές μεταβλητές στις οποίες θα μπορούσε να εφαρμοστεί η μέθοδος είναι η θερμοκρασία και η εξάτμιση. Μέσω αυτής της διερεύνησης και με βάση τις συγκρίσεις που θα γίνουν με άλλες μεθόδους θα καταστεί δυνατό να ελεγχθούν συστηματικά τα όρια, τα πλεονεκτήματα και τα μειονεκτήματα της προτεινόμενης μεθοδολογίας.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Κουτσογιάννης, Δ., και Ξανθόπουλος, Θ., 1997. Τεχνική Υδρολογία (2<sup>η</sup> Έκδοση). Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- Μαμάσης, Ν., 1997. Ανάλυση βροχοπτώσεων κατά τύπο καιρού. Διδακτορική διατριβή, Ε.Μ.Π., Αθήνα.
- Μιμίκου, Μ., 1994. Τεχνολογία Υδατικών Πόρων (2<sup>η</sup> Έκδοση). Εκδόσεις Παπασωτηρίου, Αθήνα.
- Χριστοφίδης, Α., και Μαμάσης, Ν., 1995. Εκτίμηση και διαχείριση των υδατικών πόρων της Στερεάς Ελλάδας. Τεύχος 18: Επεξεργασία υδρομετεωρολογικών δεδομένων. Ε.Μ.Π., Τομέας Υ.Π.Υ.Θ.Ε., Αθήνα.
- Bethlahmy, N., 1976. The two axis method to calculate average precipitation over a basin. *Hydrol. Sci. Bull.* 21, 379-385.
- Craven, P., Wahba, G., 1979. Smoothing noisy data with spline functions. *Numerische Mathematik* 31, 377-403.
- Creutin, J.D., Obled, C., 1982. Objective analysis and mapping techniques for rainfall fields: an objective comparison. *Water Resour. Res.* 18 (2), 413-431.
- Davis, J.C., 1986. *Statistics and Data Analysis in Geology*. John Wiley & Sons, New York.
- Dingman, S.L., 1994, *Physical Hydrology*. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.
- Ertel, J.E., Fowlkes, E.W., 1976. Some algorithms for linear spline and piecewise multiple linear regression. *Journal of the American Statistical Association* 71 (355), 640-648.
- Goovaerts, P., 2000. Geostatistical approaches for incorporating elevation into the spatial interpolation of rainfall. *J. Hydrol.* 228, 113-129.
- Hutchinson, M.F., De Hoog, F.R., 1985. Smoothing noisy data with spline functions. *Numerische Mathematik* 47, 99-106.
- Koutsoyiannis, D., 2000. Broken line smoothing: a simple method for interpolating and smoothing data series. *Environmental Modeling & Software* 15(2), 139-149.

- Marlow, W.H., 1993. Mathematics for Operations Research. Dover Publications, New York.
- Press, H.W., Teukolsky, A.S., Vetterling, T.W., Flannery, P.B., 1992. Numerical Recipes in C. Cambridge University Press, 43-48 pp.
- Reinsch, C.H., 1967. Smoothing by spline functions. Numerische Mathematik 10, 177-185.
- Reinsch, C.H., 1971. Smoothing by spline functions II. Numerische Mathematik 16, 451-454.
- Shaw, E.M., 1988. Hydrology in Practice. (2<sup>nd</sup> ed.). London, United Kingdom: Van Nostrand-Reinhold.
- Tabios, G.Q., Salas, J.D., 1985. A comparative analysis of techniques for spatial interpolation of precipitation. Water Resour. Bull. 21 (3), 365-380.
- Thiessen, A.H., 1911. Precipitation for large areas. Monthly Weather Review 39, 1082-1084.
- Wahba. G., 1990. Spline models for observational data. In: CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 169 pp.

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 1

### *Εύρεση του μητρώου Π*

```
Private Sub FindMatrixPi(ByVal m As Integer, ByVal xmin As Double, ByVal xmax
As Double, ByRef x() As Double, ByRef c() As Double, ByRef Pi)
    Const small = 1E-16    'used to compare if a value is close to 0
    Dim i As Integer, j As Integer, delta As Double, tmp As Double

    For j = 1 To UBound(x)
        For i = 0 To m
            Pi(j, i) = 0
        Next i
    Next j

    For i = 1 To UBound(x)
        delta = (xmax - xmin) / m
        tmp = (x(i) - xmin) / delta 'include the point in case that x(i) = xmin
            'the case x(i) = xmax
        If Abs(tmp) < small Then tmp = small    'so that j will be 1
        j = Application.WorksheetFunction.RoundUp(tmp, 0)
        If (j > 0) And (j <= m) Then        'exclude points outside [xmin, xmax]
            Pi(i, j) = (x(i) - c(j - 1)) / delta
            Pi(i, j - 1) = (c(j) - x(i)) / delta
        End If
    Next i
End Sub
```





*Εύρεση του μητρώου  $\Psi$*

```
Private Sub FindMatrixPsi(ByVal m As Integer, ByRef Psi)
```

```
    Dim i As Integer, j As Integer
```

```
    For i = 0 To m
```

```
        For j = 0 To m
```

```
            Psi(i, j) = 0
```

```
        Next j
```

```
    Next i
```

```
    For i = 1 To m - 1
```

```
        Psi(i, i - 1) = -1
```

```
        Psi(i, i) = 2
```

```
        Psi(i, i + 1) = -1
```

```
    Next i
```

```
End Sub
```

*Εύρεση του  $2^{00}$  μητρώου του δευτέρου μέλους της εξίσωσης 3.29*

```
Private Sub FindMatrix2(ByRef PiT, ByRef TpiT, ByRef M2, ByVal m, ByVal n)
```

```
    Dim i As Integer, j As Integer
```

```
    For i = 0 To 2 * m + 1
```

```
        For j = 1 To n
```

```
            M2(i, j) = 0
```

```
        Next j
```

```
    Next i
```

```
    For i = 0 To m
```

```
        For j = 1 To n
```

```
            M2(i, j) = PiT(i, j)
```

```
        Next j
```

```
    Next i
```

```
    i = 0
```

```
    j = 0
```

```
    For i = m + 1 To 2 * m + 1
```

```
        For j = 1 To n
```

```
            M2(i, j) = TpiT(i - m - 1, j)
```

```
        Next j
```

```
    Next i
```

```
End Sub
```

*Εύρεση του  $I^{2m}$  μητρώου του δευτέρου μέλους της εξίσωσης 3.29*

```
Private Sub FindMatrix1(ByRef tmpL, ByRef tmpM, ByRef M1, ByVal m, ByRef  
TmA, ByRef mAT)
```

```
    Dim i As Integer, j As Integer
```

```
    For i = 0 To 2 * m + 1
```

```
        For j = 0 To 2 * m + 1
```

```
            M1(i, j) = 0
```

```
        Next j
```

```
    Next i
```

```
    For i = 0 To m
```

```
        For j = 0 To m
```

```
            M1(i, j) = tmpL(i, j)
```

```
        Next j
```

```
    Next i
```

```
    i = 0
```

```
    j = 0
```

```
    For i = m + 1 To 2 * m + 1
```

```
        For j = 0 To m
```

```
            M1(i, j) = TmA(i - m - 1, j)
```

```
        Next j
```

```
    Next i
```

```
    i = 0
```

```
    j = 0
```

```
    For i = 0 To m
```

```
        For j = m + 1 To 2 * m + 1
```

```
            M1(i, j) = mAT(i, j - m - 1)
```

```
        Next j
```

```
    Next i
```

```
    i = 0
```

```
    j = 0
```

```
    For i = m + 1 To 2 * m + 1
```

```
For j = m + 1 To 2 * m + 1
  M1(i, j) = tmpM(i - m - 1, j - m - 1)
Next j
Next i

End Sub
```

*Επίλυση του συστήματος της εξίσωσης 3.29*

'Solves for d the system  $(mA + l mB) d = vC$ . Returns the vector d()  
Private Sub Results(m As Integer, n As Integer, ll As Double, mm As Double, Pi, Psi,  
y, \_  
ByRef d() As Double, ByRef M2() As Double, T, ByRef err As Double, ByRef trace  
As Double, \_  
ByRef M1() As Double)

Dim i As Integer, j As Integer

Dim tmp1, tmp2, tmp3, a, tmpL, tmpM

Dim vC, PiT, mT, mA, mB, piTT, piTTpi, piTmT, piTmTpi

ReDim mA(0 To m, 0 To m) As Double

PiT = Transpose(Pi)

mA = aTa(Pi)

mT = aTa(T)

mB = aTa(Psi)

piTT = MMult(PiT, T) 'Matrix Transpose(T)=T, άρα PiTTT=PiTT

piTTpi = MMult(piTT, Pi)

piTmT = MMult(PiT, mT)

piTmTpi = MMult(piTmT, Pi) ' Οι πράξεις είναι σωστές

FindMatrix2 PiT, piTT, M2, m, n

vC = MMult(M2, y)

ReDim tmpL(LBound(mA, 1) To UBound(mA, 1), LBound(mA, 1) To UBound(mA,  
1)) As Double

ReDim tmpM(LBound(mA, 1) To UBound(mA, 1), LBound(mA, 1) To UBound(mA,  
1)) As Double

For i = LBound(mA, 1) To UBound(mA, 1)

For j = LBound(mA, 2) To UBound(mA, 2) 'tmp = mA + l mB

tmpM(i, j) = piTmTpi(i, j) + mm \* mB(i, j)

Next j

Next i

```

For i = LBound(mA, 1) To UBound(mA, 1)
  For j = LBound(mA, 2) To UBound(mA, 2)      'tmp = mA + 1 mB
    tmpL(i, j) = mA(i, j) + 11 * mB(i, j)
  Next j
Next i
FindMatrix1 tmpL, tmpM, M1, m, piTTpi, piTTpi
tmp2 = Application.MInverse(M1)      'tmp2 = (mA + 1 mB) ^ -1
tmp1 = MMult(tmp2, vC) 'tmp3) 'Here we have b() as a variant. MMult multiplies
                                'two matrices

i = 0
For Each a In tmp1      'Assign the variant tmp1 to array d()
  d(i) = a
  i = i + 1
Next a

End If
End Sub

```



*Κύρια συνάρτηση*

'Main function

Function BLSE(xpoints As Range, tpoints As Range, known\_y\_s As Range,  
known\_x\_s As Range, XT As Range, T As Range, m As Integer, \_

Optional ll As Double = 0.01, Optional mm As Double = 0.01, Optional xmin,  
Optional xmax, \_

Optional DebugInfo As Double = 6)

Dim i As Integer, j As Integer, n As Integer, k As Integer, o As Integer

Dim delta As Double, err As Double, trace As Double

Dim a, b, mA, mB

'Fill missing arguments

If IsMissing(xmin) Then xmin = Application.Min(known\_x\_s)

If IsMissing(xmax) Then xmax = Application.Max(known\_x\_s)

'Check inappropriate function call

If ((known\_x\_s.Rows.Columns.Count > 1) And (known\_x\_s.Rows.Count > 1)) Or \_

((known\_y\_s.Rows.Columns.Count > 1) And (known\_y\_s.Rows.Count > 1)) Or \_

(known\_x\_s.Count <> known\_y\_s.Count) Or (xmin >= xmax) Then

BLSE = Null

Exit Function

End If

n = 0                    Fill xx and yy

For Each a In known\_x\_s

If a.Value >= xmin And (a.Value <= xmax) Then n = n + 1

Next a

For Each a In T

If a.Value >= Application.Min(T) And (a.Value <= Application.Max(T)) Then k = k +

1

Next a

o = 0

For Each a In xpoints

If a.Value >= Application.Min(xpoints) And (a.Value <= Application.Max(xpoints))

Then o = o + 1

Next a

ReDim yy(1 To n) As Double, xx(1 To n) As Double 'The equivalents of y and x in array form

ReDim Pi(1 To n, 0 To m) As Double 'matrix MA

ReDim Psi(0 To m, 0 To m) As Double 'matrix mB

ReDim xtt(0 To k) As Double 'matrix of many x

ReDim tt(0 To k) As Double 'matrix of many T

ReDim tmpT(1 To n, 1 To n) As Double

ReDim c(0 To 2 \* m + 1) As Double ' x ordinates

ReDim d(0 To 2 \* m + 1) As Double ' y ordinates

ReDim e(0 To m) As Double

ReDim d1(0 To m) As Double

ReDim M1(0 To 2 \* m + 1, 0 To 2 \* m + 1) As Double

ReDim M2(0 To 2 \* m + 1, 1 To n) As Double

ReDim cd(0 To 2 \* m + 1, 1 To 2) As Double 'An array containing both c and d

ReDim xy(0 To o - 1, 1 To 2) As Double 'An array containing both x and estimates of y

on Case 7

ReDim xxpoints(0 To o - 1) As Double

ReDim ttpoints(0 To o - 1) As Double

ReDim Final(1 To n) As Double 'Results of estimates at the intervals. Number of points m

ReDim Final2(0 To o - 1) As Double 'Results of Case 7-Point Estimation. Number of points o

ReDim xy1(0 To o - 1, 0) As Double

i = 0

For Each b In xpoints

xxpoints(i) = b.Value

i = i + 1

Next b

i = 0

For Each b In tpoints

ttpoints(i) = b.Value

i = i + 1

Next b

i = 0: j = 0 'Fill xx and yy

```

For Each a In known_x_s
  j = j + 1
  If a.Value >= xmin And (a.Value <= xmax) Then
    i = i + 1
    xx(i) = a.Value
    yy(i) = known_y_s.Value(j, 1)
  End If
Next a

```

```

i = 0
For Each b In XT
  xtt(i) = b.Value
  i = i + 1
Next b

```

```

i = 0
For Each b In T
  tt(i) = b.Value
  i = i + 1
Next b

```

```

i = 0

```

```

delta = (xmax - xmin) / m
For i = 0 To 2 * m + 1
  If i <= m Then
    c(i) = xmin + i * delta
  Else
    c(i) = xmin + (i - m - 1) * delta
  End If
Next i

```

```

FindMatrixPi m, xmin, xmax, xx, c, Pi
FindMatrixPsi m, Psi
FindMatrixT xx, xtt, tt, tmpT, n, k, xmax, xmin

```

Results m, n, ll, mm, Pi, Psi, yy, d, M2, tmpT, err, trace, M1 'Solve the system

Estimates d, Pi, tmpT, m, n, Final, dl, e

PointEstimates xxpoints, ttpoints, dl, e, o, m, Final2, xmax, xmin

For i = 0 To o - 1

xy(i, 1) = xxpoints(i)

xy(i, 2) = Final2(i) 'This is the final result

Next i

BLSE = xy

End Function

### *Εύρεση του μητρώου T*

```
Private Sub FindMatrixT(ByRef xx, ByRef xtt, ByRef tt, ByRef tmpT, ByVal n, ByVal  
k, ByVal xmax, ByVal xmin)
```

```
    Dim i As Integer, j As Integer, delta As Double  
    Dim b  
  
    For j = 1 To n  
        For i = 1 To n  
            tmpT(i, j) = 0  
        Next i  
    Next j  
    i = 1  
    For Each b In xx  
        tmpT(i, i) = Interpolate2(xtt, tt, b, k)  
        i = i + 1  
    Next b  
End Sub
```

*Εύρεση των κορυφών της διπλής τεθλασμένης γραμμής*

```
Private Sub Estimates(ByRef d() As Double, ByRef Pi() As Double, ByRef T() As  
Double, ByVal m, ByVal n, ByRef Final() As Double, ByRef dl() As Double, ByRef e() As  
Double)
```

```
Dim i As Integer, j As Integer, Pid, Pie, TPie, a, b
```

```
ReDim TPiece(1 To n) As Double, Pidd(1 To n) As Double
```

```
ReDim e(0 To m) As Double
```

```
ReDim dl(0 To m) As Double
```

```
i = 0
```

```
For i = 0 To m
```

```
dl(i) = d(i)
```

```
Next i
```

```
For i = m + 1 To 2 * m + 1
```

```
e(i - m - 1) = d(i)
```

```
Next i
```

```
Pie = MMult(Pi, e)
```

```
TPie = MMult(T, Pie)
```

```
Pid = MMult(Pi, dl)
```

```
i = 1
```

```
For Each b In TPie 'Assign the variant Te to array d()
```

```
TPiece(i) = b
```

```
i = i + 1
```

```
Next b
```

```
i = 1
```

```
For Each a In Pid 'Assign the variant Te to array d()
```

```
Pidd(i) = a
```

```
i = i + 1
```

```
Next a
```

```
For i = 1 To n
```

```
Final(i) = Pidd(i) + TPiece(i)
```

```
Next i
```

```
End Sub
```

### *Εύρεση των ζητούμενων σημείων*

```
Private Sub PointEstimates(ByRef xxpoints() As Double, ByRef ttpoints() As Double,  
ByRef d1() As Double, ByRef e() As Double, ByVal o As Integer, ByVal m As Integer,  
ByRef Final2() As Double, ByVal xmax, ByVal xmin)
```

```
    Dim i As Integer, j As Integer, delta As Double
```

```
    Dim cLow As Double, cHigh As Double, dLow As Double, dHigh As Double, eLow  
As Double, eHigh As Double
```

```
    Dim thigh As Double, tlow As Double
```

```
    ReDim Tee(0 To m) As Double
```

```
    ReDim c(0 To m) As Double
```

```
    i = 0
```

```
    delta = (xmax - xmin) / m
```

```
    For i = 0 To m
```

```
        c(i) = xmin + i * delta
```

```
    Next i
```

```
    i = 0
```

```
    For j = 0 To o - 1
```

```
        i = 0
```

```
        Do
```

```
            i = i + 1
```

```
            cLow = c(i - 1)
```

```
            cHigh = c(i)
```

```
            Loop Until (xxpoints(j) <= cHigh) Or i = m
```

```
            dLow = d1(i - 1)
```

```
            dHigh = d1(i)
```

```
            eLow = e(i - 1)
```

```
            eHigh = e(i)
```

```
            Final2(j) = 1 / delta * ((dHigh * (xxpoints(j) - cLow) + dLow * (cHigh - xxpoints(j))) +  
(ttpoints(j) * ((eHigh * (xxpoints(j) - cLow) + eLow * (cHigh - xxpoints(j))))))
```

```
        Next j
```

```
    End Sub
```



*Βοηθητική συνάρτηση γραμμικής παρεμβολής*

```
Function Interpolate2(ByRef Array_x, ByRef Array_Fx, ByVal x, ByVal k) As Double
Dim i As Integer, xLow As Double, xHigh As Double
Dim FxLow As Double, FxHigh As Double, Fx As Double

i = 0
Do
    i = i + 1
    xLow = Array_x(i - 1)
    xHigh = Array_x(i)
    Loop Until (x <= xHigh) Or i = k
FxLow = Array_Fx(i - 1)
FxHigh = Array_Fx(i)
If x = xLow Then
    Fx = FxLow
Elseif x = xHigh Then
    Fx = FxHigh
Elseif FxHigh = FxLow Then
    Fx = FxLow
Else
    Fx = FxLow + (FxHigh - FxLow) * (x - xLow) / (xHigh - xLow)
End If
Interpolate2 = Fx
End Function
```

**ΚΩΔΙΚΑΣ ΣΕ OBJECT PASCAL ΠΟΥ ΑΝΑΠΤΥΧΘΗΚΕ ΓΙΑ ΤΙΣ ΔΥΟ  
ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ**

```
unit Matrices3;

interface

uses Math;

Κύρια συνάρτηση
procedure Surface ( n, mx, my, o: Integer; xmin, xmax, ymin, ymax, lamdax, lamday, mix,
miy: Double;
                var xx, yy, zz, xxpoints, yypoints, ttpoints, tt: Vector; var Final, Final2, d:
Vector);

Εύρεση του μητρώου Π
procedure FindMatrixPi(n, mx, my: Integer; xmin, xmax, ymin, ymax: Double; var x, y: Vector;
var Pi: Matrix);

Εύρεση του μητρώου Ψx
procedure FindMatrixPsiX (mx, my : Integer; var PsiX :Matrix);

Εύρεση του μητρώου Ψy
procedure FindMatrixPsiY (mx, my : Integer; var PsiY :Matrix);

Εύρεση του μητρώου Ψx
procedure FindMatrixPsi (mx, my : Integer; lamdax, lamday, mix, miy: Double; var PsiX, PsiY:
Matrix; var PsiTPsilamda, PsiTPsimi, Psi :Matrix);

Εύρεση του 1ο μητρώου του δευτέρου μέλους της εξίσωσης 4.43
procedure FindMatrix1 (m: Integer; var tmpL, tmpM, TmA, mAT: Matrix; var M1: Matrix);

Εύρεση του 2ο μητρώου του δευτέρου μέλους της εξίσωσης 4.43
procedure FindMatrix2 (m, n: Integer; var PiT, TPiT: Matrix; var M2: Matrix);

Εύρεση του μητρώου T
procedure FindMatrixT (n : Integer; var tt : Vector; var tmpT : Matrix);

Βοηθητική συνάρτηση γραμμικής παρεμβολής
function Interpolate2 (x, y : Double; myT, k : Integer; var Array_x, Array_y, Array_Fxy :
Vector): Double;

Εύρεση των κορυφών της διπλής τεθλασμένης επιφάνειας
procedure Estimates (m, n : Integer; var Pi, T: Matrix; var d: Vector; var Final: Vector; var d1,
e: Vector1);

Εύρεση των ζητούμενων σημείων
procedure PointEstimates (o, mx, my : Integer; xmin, xmax, ymin, ymax : Double; var xxpoints,
yypoints, ttpoints: Vector; var d1, e: Vector1; var Final2: Vector);

Επίλυση του συστήματος της εξίσωσης 4.43
```

```
procedure Results (m, n: Integer; var Pi, PsiTPsiLamda, PsiTPsimi, T: Matrix; var y: Vector;
var M1, M2: Matrix; var d: Vector);
```

```
implementation
```

```
procedure Surface;
```

```
var
```

```
  m: Integer;
```

```
  Pi, PsiX, PsiY, tmpT, PsiTPsilamda, PsiTPsimi, Psi, M1, M2: Matrix;
```

```
  d1, e: Vector1;
```

```
begin
```

```
  m := (mx + 1) * (my + 1) - 1;
```

```
  SetLength(Pi, n, m+1);
```

```
  FindMatrixPi(n, mx, my, xmin, xmax, ymin, ymax, xx, yy, Pi);
```

```
  SetLength(PsiX, m+1, m+1);
```

```
  SetLength(PsiY, m+1, m+1);
```

```
  FindMatrixPsiX (mx, my, PsiX);
```

```
  FindMatrixPsiY (mx, my, PsiY);
```

```
  SetLength(PsiTPsimi, m+1, m+1);
```

```
  SetLength(Psi, m+1, m+1);
```

```
  SetLength(PsiTPsilamda, m+1, m+1);
```

```
  FindMatrixPsi (mx, my, lamdax, lamday, mix, miy, PsiX, PsiY, PsiTPsilamda, PsiTPsimi,
Psi);
```

```
  SetLength(tmpT, n, n);
```

```
  FindMatrixT (n, tt, tmpT);
```

```
  SetLength(M1, 2*m + 2, 2*m + 2);
```

```
  SetLength(M2, 2*m + 2, n);
```

```
  Results (m, n, Pi, PsiTPsiLamda, PsiTPsimi, tmpT, zz, M1, M2, d);
```

```
  SetLength(d1, m + 1);
```

```
  SetLength(e, m + 1);
```

```
  Estimates (m, n, Pi, tmpT, d, Final, d1, e);
```

```
  PointEstimates (o, mx, my, xmin, xmax, ymin, ymax, xxpoints, yypoints, ttpoints, d1, e,
Final2);
```

```

Finalize(PsiX);
Finalize(PsiY);
Finalize(d1);
Finalize(e);
Finalize(Pi);
Finalize(Psi);
Finalize(tmpT);
Finalize(PsiTPsilamda);
Finalize(PsiTPsimi);
end; {procedure Surface }

```

```

procedure FindMatrixPi;
const
  small = 10e-16;
var
  i, j, l, m: Integer;
  deltax, deltay, tmpx, tmpy: Double;
  k1, k2, k3, k4: Integer;
  cx, cy: Vector1;
begin
  SetLength(cx, mx+1);
  SetLength(cy, my+1);

  deltax:=(xmax - xmin)/mx;
  deltay:=(ymax - ymin)/my;

  For i:=0 to mx do cx[i]:=xmin + i*deltax;
  For i:=0 to my do cy[i]:=ymin + i*deltay;

  m := (mx + 1) * (my + 1) - 1;
  For j:=0 to n-1 do {Προσοχή διαφορά με την VBA}
    For i:=0 to m do Pi[j,i]:=0;

  For l:=0 to n-1 do
  begin
    tmpx:= (x[l]-xmin)/deltax;
    If ABS(tmpx)<small then tmpx:=small;
    tmpy:= (y[l]-ymin)/deltay;

```

```

If ABS(tmpy)<small then tmpy:=small;

i:=RoundUp(tmpx);
j:=RoundUp(tmpy);

k1:=i*(my+1) + j;
k2:=(i-1)*(my+1) + j;
k3:=i*(my+1) + (j-1);
k4:=(i-1)*(my+1) + (j-1);

If ((k1>=0) and (k1<(mx+1)*(my+1)) and
    (k2>=0) and (k2<(mx+1)*(my+1)) and
    (k3>=0) and (k3<(mx+1)*(my+1)) and
    (k4>=0) and (k4<(mx+1)*(my+1)))
then
begin
  Pi[l,k1]:=(x[l]-cx[i-1])*(y[l]-cy[j-1])/(deltax*deltay);
  Pi[l,k2]:=(cx[i]-x[l])*(y[l]-cy[j-1])/(deltax*deltay);
  Pi[l,k3]:=(x[l]-cx[i-1])*(cy[j]-y[l])/(deltax*deltay);
  Pi[l,k4]:=(cx[i]-x[l])*(cy[j]-y[l])/(deltax*deltay);
end;

end; {For l:=0 to n-1}

Finalize(cx); Finalize(cy);
end; {procedure FindMatrixPi}

```

```

procedure FindMatrixPsiX ;

```

```

var

```

```

  i, j, k, m : Integer;

```

```

begin

```

```

  m := (mx + 1) * (my + 1) - 1;

```

```

  For i:= 0 to m do

```

```

    For j:= 0 to m do PsiX[i, j]:= 0 ; {Fill PsiX with 0}

```

```

  For k:= 1 to m - 1 do

```

```

begin

    i:= k mod (mx + 1);    {Calculate j}

    If not (i in [0, mx]) then
    begin
        PsiX[k, k]:= 2;
        PsiX[k, k - 1]:= - 1;
        PsiX[k, k + 1]:= - 1;
    end;
end;
end; {procedure FindMatrixPsiX}

```

```

procedure FindMatrixPsiY ;
var
    i, j, k, m : Integer;
begin
    m := (mx + 1) * (my + 1) - 1;

    For i:= 0 to m do    {Fill PsiX with 0}
        For j:= 0 to m do
            PsiY[i, j]:= 0 ;

    For k:= 0 to m do
    begin

        j:= k mod (my + 1);    {Calculate j}

        If not (j in [0, my]) then
        begin
            PsiY[k, k]:= 2;
            PsiY[k, k - 1]:= - 1;
            PsiY[k, k + 1]:= - 1;
        end;
    end;
end; {procedure FindMatrixPsiY}

```

```

procedure FindMatrixPsi;

```

```

var
  i, j, m : Integer;
  tmpx, tmpy : Matrix;
  temp: Matrix;

begin
  m := (mx + 1) * (my + 1) - 1;

  SetLength(tmpx, m+1, m+1);
  SetLength(tmpy, m+1, m+1);
  SetLength(temp, m+1, m+1);

  Transpose(PsiX, temp);
  MMult(temp, PsiX, tmpx);
  Transpose(PsiY, temp);
  MMult(temp, PsiY, tmpy);

  For i:= 0 to m do    {Psi = PsiX + PsiY}
    For j:= 0 to m do
      Psi[i, j]:= PsiX[i, j] + PsiY[i, j];

  For i:= 0 to m do
    For j:= 0 to m do
      PsiTPsilamda[i, j]:= lamdax * tmpx[i, j] + lamday * tmpy[i, j];

  For i:= 0 to m do
    For j:= 0 to m do
      PsiTPsimi[i, j]:= mix * tmpx[i, j] + miy * tmpy[i, j];

  Finalize(tmpx); Finalize(tmpy); Finalize(temp);
end; {procedure FindMatrixPsi}

```

```

procedure FindMatrix1 ;
var
  i, j : Integer;
begin
  For i:= 0 to 2*m + 1 do
    begin
      For j:= 0 to 2*m + 1 do

```



```

    M1[i, j] := 0;
end;

For i:= 0 to m do
begin
    For j:= 0 to m do
        M1[i, j] := tmpL[i, j];
    end;

    For i:= m + 1 to 2*m + 1 do
begin
    For j:= 0 to m do
        M1[i, j] := TmA[i - m - 1, j];
    end;

    For i:= 0 to m do
begin
    For j:= m + 1 to 2*m + 1 do
        M1[i, j] := mAT[i, j - m - 1];
    end;

    For i:= m + 1 to 2*m + 1 do
begin
    For j:= m + 1 to 2*m + 1 do
        M1[i, j] := TmpM[i - m - 1, j - m - 1];
    end;

    Finalize(TmA);
    Finalize(mAT);
    Finalize(tmpL);
    Finalize(tmpM);
end; {procedure FindMatrix1}

```

```

procedure FindMatrix2 ;
var
i, j : Integer;
begin
    For i:= 0 to 2*m + 1 do
begin

```

```

    For j:= 0 to n - 1 do
      M2[i, j] := 0;
    end;

    For i:= 0 to m do
      begin
        For j:= 0 to n - 1 do
          M2[i, j] := PiT[i, j];
        end;
        For i:= m + 1 to 2*m + 1 do
          begin
            For j:= 0 to n - 1 do
              M2[i, j] := TPiT[i - m - 1, j];
            end;
          end;
        end;

      Finalize(PiT);
      Finalize(TPiT);

    end; {procedure FindMatrix2}

procedure FindMatrixT ;
var
  i, j : Integer;

begin

  For j:= 0 to n - 1 do
    For i:= 0 to n - 1 do tmpT[i, j]:= 0;

  For i:= 0 to n - 1 do tmpT[i, i]:= tt[i];

end; {procedure FindMatrixT}

function Interpolate2;
var
  i, j, k1, k2, k3, k4 : Integer;

```

```

kx0, kx1 : Integer;
xLow, xHigh, yLow, yHigh, F1, F2, F3, F4, Fxy : Double;
begin
j:= 0;
Repeat
j:= j + 1;
yLow:= Array_y[j - 1];
yHigh:= Array_y[j];
until (y <= yHigh) Or (j = k);

i:= 0;
Repeat
i:= i + 1;
kx0:= (i - 1) *(myT + 1) +j;
kx1:= i * (myT+1) +j;
xLow:= Array_x[kx0];
xHigh:= Array_x[kx1];
Until (x <= xHigh) Or (i = k);

k1:= i * (myT + 1) + j;
k2:= (i - 1) * (myT + 1) + j;
k3:= i * (myT + 1) + (j - 1);
k4:= (i - 1) * (myT + 1) + (j - 1);

F1:= Array_Fxy[k1]; {i,j} {Upper right corner}
F2:= Array_Fxy[k2]; {i-1,j}
F3:= Array_Fxy[k3]; {i,j-1}
F4:= Array_Fxy[k4]; {i-1,j-1}

If (F1>=0) And (F2>=0) And (F3>=0) And (F4>=0) Then {Προσοχή προσθήκη για τον
υπολογισμό του Fxy στα όρια του καννάβου}
Fxy:= (1 - (x - xLow) / (xHigh - xLow)) * (1 - (y - yLow) / (yHigh - yLow)) * F4 +
((x - xLow) / (xHigh - xLow)) * (1 - (y - yLow) / (yHigh - yLow)) * F3 +
(1 - (x - xLow) / (xHigh - xLow)) * ((y - yLow) / (yHigh - yLow)) * F2 +
((x - xLow) / (xHigh - xLow)) * ((y - yLow) / (yHigh - yLow)) * F1

Else
Fxy:= 0;

Interpolate2:= Fxy;

```

end; {Function Interpolate2}

procedure Estimates ;

var

i, j : Integer;

Pie : Vector1;

TPie : Vector1;

Pid : Vector1;

begin

SetLength(Pie, n);

SetLength(TPie, n);

SetLength(Pid, n);

For i:= 0 to m do d1[i]:= d[i];

For i:= m + 1 to 2\*m + 1 do e[i - m - 1]:= d[i];

For i:=0 to n - 1 do

begin

Pie[i]:=0;

For j:=0 to m do

Pie[i]:=Pie[i] + Pi[i,j]\*e[j];

end;

For i:=0 to n - 1 do

begin

TPie[i]:=0;

For j:=0 to n - 1 do

TPie[i]:=TPie[i] + T[i,j]\*Pie[j];

end;

For i:= 0 to n - 1 do Final[i]:= Pid[i] + TPie[i];

Finalize(Pie);

Finalize(TPie);

Finalize(Pid);

end; {procedure Estimates}

```

procedure PointEstimates ;
var
  i, ix, iy, j : Integer;
  k1, k2, k3, k4 : Integer;
  deltax, deltay : Double;
  cxLow, cxHigh, cyLow, cyHigh : Double;
  dk1, dk2, dk3, dk4, ek1, ek2, ek3, ek4 : Double;
  cx, cy : Vector1;

begin
  SetLength(cx, mx+1);
  SetLength(cy, my+1);

  deltax:= (xmax - xmin) / mx;
  For i:= 0 to mx do
    cx[i]:= xmin + i * deltax;

  deltay:= (ymax - ymin) / my;
  For i:= 0 to my do
    cy[i]:= ymin + i * deltay;

  For j:= 0 to o - 1 do
    begin
      ix:= 0;
      iy:= 0;

      Repeat
        ix:= ix + 1;
        cxLow:= cx[ix - 1];
        cxHigh:= cx[ix];
      Until (xxpoints[j] <= cxHigh) Or (ix = mx);

      Repeat
        iy:= iy + 1;
        cyLow:= cy[iy - 1];
        cyHigh:= cy[iy];
      Until (yypoints[j] <= cyHigh) Or (iy = my);

      k1:= ix * (my + 1) + iy;    {From 2 dimensions to 1 dimension}
      k2:= (ix - 1) * (my + 1) + iy;
    
```

```

k3:= ix * (my + 1) + (iy - 1);
k4:= (ix - 1) * (my + 1) + (iy - 1);

dk1:= d1[k1];    {This is di,k}
dk2:= d1[k2];    {This is di-1,k}
dk3:= d1[k3];    {This is di,k-1}
dk4:= d1[k4];    {This is di-1,k-1}
ek1:= e[k1];     {This is ei,k}
ek2:= e[k2];     {This is ei-1,k}
ek3:= e[k3];     {This is ei,k-1}
ek4:= e[k4];     {This is ei-1,k-1}
Final2[j]:= 1 / (deltax * deltay) * (dk4 * (cxHigh - xxpoints[j]) * (cyHigh - yypoints[j])
+ dk3 * (xxpoints[j] - cxLow) * (cyHigh - yypoints[j]) + dk2 * (cxHigh - xxpoints[j]) *
(yypoints[j] - cyLow) + dk1 * (xxpoints[j] - cxLow) * (yypoints[j] - cyLow))
+ (ttpoints[j] / (deltax * deltay)) * (ek4 * (cxHigh - xxpoints[j]) * (cyHigh - yypoints[j]) +
ek3 * (xxpoints[j] - cxLow) * (cyHigh - yypoints[j]) + ek2 * (cxHigh - xxpoints[j]) *
(yypoints[j] - cyLow) + ek1 * (xxpoints[j] - cxLow) * (yypoints[j] - cyLow));
end;

Finalize(cx); Finalize(cy);
end; {procedure PointEstimates}

```

```

procedure Results;
var
  i, j: Integer;
  tmpL, tmpM, tmpM1, PiT, mA, mBlamda, mBmi, PiTT, PiTTPi : Matrix;
  vc: Vector1;
  detSign: Integer;
  Index: array of Integer;
begin
  SetLength(tmpL, m+1, m+1);
  SetLength(tmpM, m+1, m+1);
  SetLength(PiT, m+1, n);
  SetLength(mA, m+1, m+1);
  SetLength(mBlamda, m+1, m+1);
  SetLength(mBmi, m+1, m+1);
  SetLength(PiTT, m+1, n);
  SetLength(piTTPi, m+1, m+1);
  SetLength(vc, 2*m+2);

```

```

SetLength(Index, 2*m+2);

Transpose(Pi, PiT);
MMult(PiT, Pi, mA);

mBlamda:=PsiTPsiLamda;
mBmi:=PsiTPsimi;

MMult( PiT, T, PiTT);
MMult(PiTT, Pi, PiTTPi);  {Πτ Tτ Π=Πτ TΠ}

FindMatrix2(m, n, PiT, PiTT, M2);

For i:=0 to 2*m+1 do
begin
  vc[i]:=0;
  For j:=0 to n-1 do vc[i]:=vc[i] + M2[i,j]*y[j];
end;
Finalize(M2);

For i:=0 to m do
begin
  For j:=0 to m do
    tmpM[i,j]:=PiTTPi[i,j] + mBmi[i,j];
  end;
Finalize(mBmi);

For i:=0 to m do
begin
  For j:=0 to m do
    tmpL[i,j]:=mA[i,j] + mBlamda[i,j];
  end;
Finalize(mA);
Finalize(mBlamda);

FindMatrix1 (m, tmpL, tmpM, PiTTPi, PiTTPi, M1);
SetLength(tmpM1, 2*m + 2, 2*m + 2);
tmpM1:=M1;
LUdecomposition (2*m+2, tmpM1, DetSign, Index);
LUBacksubstitution (2*m+2, M1, Index, vc);

```



```
For i:=0 to 2*m+1 do  
d[i]:=vc[i];
```

```
Finalize(M1);  
Finalize(vc);  
Finalize(Index);  
Finalize(tmpM1);
```

```
end; {procedure Results}
```

```
end.
```

## ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ 2

**Πίνακας 1: Δεδομένα σταθμών Στερεάς Ελλάδας<sup>1</sup>**

Id	code	Name	X	Y	Z	rain
1	402	Αγ. Βλάσιος	395158	4261572	850	1147.7
2	403	Αγρίνιο	273426	4277042	47	968
3	404	Αθ. Διάκος	341818	4284649	1050	1480.4
4	405	Ανάληψη	299225	4263396	620	1230.9
5	408	Ανιάδα	307343	4298363	1060	1429.1
6	409	Αράχωβα	314234	4283393	960	1259.6
7	413	Βάκαρη	273365	4375174	1150	1655.9
8	418	Μικρά Βαγγιανά	279695	4345367	580	1308.7
9	419	Γεφ. Επισκοπής	294654	4311639	277	1152.8
10	420	Γραμμένη Οξυά	325954	4288680	1160	1184.5
11	422	Δάφνος	334111	4262600	1050	1047.8
12	424	Δρυμώνας	296694	4278267	900	1308.7
13	425	Επινιανά	293791	4333876	1050	1860.8
14	431	Καρούτες	348716	4266012	1040	1285.1
15	432	Καρπενήσι	309058	4309427	960	1186.9
16	434	Καστράκι	357861	4289897	145	1120.9
17	439	Κονιακός	341708	4279100	850	1205.6
18	440	Κρεμαστά	281497	4306438	390	1243.4
19	441	Κρίκελλο	313089	4296375	1120	1366
20	443	Λεπενού	263595	4288436	190	1111.1
21	445	Λευκάδα	213333	4303054	2	976.9
22	446	Λιδωρίκι	344358	4266095	537	946.5
23	448	Μαλανδρίνο	345669	4258669	600	879.8
24	451	Μαυρομάτα	303692	4326218	900	1989.5
25	458	Μοναστηράκι	290762	4328402	660	1861
26	465	Παπαρούσι	297402	4306015	660	1174.3
27	469	Πενταγιοί	329986	4273789	950	1307.4
28	475	Πλάτανος	306761	4274316	900	1501.3
29	477	Πόρος Ρηγανίου	303586	4263288	150	1268.1
30	479	Πυρά	262257	4292179	1140	1343.9
31	481	Σταμνά	262938	4266237	142	1008.1
32	483	Συκέα	344609	4279043	780	1295.7
33	485	Τέμπλα	277837	4330608	306	1301
34	489	Τριπόταμος	285735	4302619	650	1251.6
35	490	Τροβάτο	292595	4343163	1060	1852.6
36	491	Φουσιανά	285247	4337807	950	1235
37	496	Γρηγόριο	324261	4277614	1000	1758.2

<sup>1</sup> Πηγή: Χριστοφίδης, Α., και Μαμάσης, Ν., 1995. Εκτίμηση και διαχείριση των υδατικών πόρων της Στερεάς Ελλάδας. Τεύχος 18: Επεξεργασία υδρομετεωρολογικών δεδομένων. Ε.Μ.Π., Τομέας Υ.Π.Υ.Θ.Ε., Αθήνα.

Πίνακας 1 (συνέχεια)

38	601	Αεροδρ. Ελληνικού	476356	4194348	10	379.9
39	602	Αεροδρ. Τατοΐου	480804	4216527	237	447.9
40	608	Αστερ/πειό Αθηνών	474913	4201749	107	389.6
41	613	Μέγαρα	442730	4205609	36	447.7
42	701	Αγ. Τριάδα	405136	4244800	400	994.6
43	703	Αλιάρτος	422649	4248313	110	576.6
44	705	Αλμυροπόταμος	515840	4235014	140	682.4
45	706	Άμφισσα	358886	4265827	180	776.5
46	707	Μουρίκι	441613	4253702	85	435.1
47	708	Άνω Μπράλος	366521	4287898	600	946.9
48	710	Αταλάντη	412780	4278009	110	573.2
49	711	Γραβιά	363497	4280548	1450	952.2
50	712	Δαύλεια	389166	4248703	380	856
51	713	Δεσφίνα	371755	4252661	590	365.5
52	714	Δρυμαία	375185	4285907	580	732.9
53	715	Επτάλοφος	367725	4273077	830	1122
54	716	Ζηλευτό	349557	4310404	120	522
55	717	Θίσβη	409381	4233654	174	452.8
56	718	Ισπαιά	426143	4311169	45	718.5
57	720	Κάτω Στενή	485281	4268300	290	1041.1
58	721	Κάτω Τιθορέα	388071	4274616	170	658.2
59	723	Καλλιθέα	451708	4238840	333	615.2
60	728	Λαμία	363941	4306443	144	586.4
61	730	Λειβαδιά	400880	4254100	200	759.1
62	732	Νεοχώρι	314969	4314839	800	1702.9
63	733	Παύλος	421355	4264972	200	494.1
64	734	Πιτσιωτά	317985	4320322	800	1257
65	735	Προκόπι	454893	4286908	70	1094
66	736	Σκύρος	548941	4305429	4	480.1
67	737	Τανάγρα	459014	4242499	139	453.6
68	738	Τρίλοφο	345367	4317887	580	650.4
69	740	Υπάτη	346524	4303061	286	806.3
70	741	Χαλκίδα	464905	4257266	5	338.8
71	802	Ανάβρα	335689	4338439	208	761.2